



L'Excellence, déjà au cœur de la tradition

Etudiants de M2

Les Facultés et Institut de l'Université Kasdi Merbah Ouargla

organisent

Les Premières

Mastérieliales

Sous la supervision du vice-recteur chargé
de la pédagogie

2015

du 01^{er} au 05 mars 2015

Les étudiants présentant leur dossier de candidature sont invités à déposer leur dossier auprès du secrétariat du vice-doyen ou du directeur-adjoint chargé de la pédagogie de leur faculté ou de leur institut avant le 19 février 2015.

Votre poster devra être déposé auprès du secrétariat du vice-doyen ou du directeur-adjoint chargé de la pédagogie de votre faculté ou de votre institut avant le 19 février 2015.



INTERPOLE D'OSWALD

Zahaf Malika

Département des Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
zahafmalika@gmail.com



Résumé

Dans cette présentation on s'intéresse à la technique de moyennisation d'Oswald ([2]) pour construire des fonctions globalement de classe C^1 et polynomiale par morceaux à partir des fonctions qui seulement continues et à l'utilisation de l'opérateur d'interpolation qui résulte dans le contexte de la méthode des éléments finis. On considère le cas d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné régulier de classe $C^{1,1}$.

Mots Clés : interpolation, espace de Sobolev, éléments finis.

1. Introduction

Il est bien connu que pour définir l'interpolé d'Hermite d'une fonction, celle ci doit être au moins de classe C^1 (voir [2]). Dans le cas d'une dimension, le théorème d'injection de Sobolev (voir [1]), qui affirme que les éléments de l'espace H^1 admettent des représentants continus, donc dans le cas unidimensionnel on peut définir l'interpolé d'Hermite d'une fonction de l'espace H^2 , car cette fonction admet un représentant de classe C^1 . Mais dans le cas bidimensionnel, il existe des éléments de H^1 qui ne sont pas continus. L'exemple suivant montre qu'il existe des éléments de H^2 qui ne sont pas de classe C^1 . Soit la fonction

$$v(x) = \begin{cases} |x| \ln \left(\ln \frac{1}{|x|} \right), & \text{avec } |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Alors $v \in H^2(B(0, \frac{1}{2}))$ mais $v \notin C^1(B(0, \frac{1}{2}))$

1. On montre que $v \in H^2(B(0, \frac{1}{2}))$

(a) comme $\int_B v^2 dx < \infty$ alors $v \in L^2(B(0, \frac{1}{2}))$

(b) $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_2} \in L^2$

(c) Il est facile de montrer que $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \in L^2$ la même chose pour $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \in L^2$ (utilisant les coordonnées polaires), alors $v \in H^1(B(0, \frac{1}{2}))$
Donc $v \in H^2(B(0, \frac{1}{2}))$

2. On remarque :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x) - v(0)}{|x - 0|} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \ln \frac{1}{|x|} \right| \rightarrow \infty$$

Alors $v \notin C^1(B(0, \frac{1}{2}))$

Donc on ne peut pas définir l'interpolé d'Hermite, qui est défini par :

$$\mathcal{H}_h^1 v := \sum_{i=1}^K N_i(v) \varphi_i.$$

avec : $N_i(v) = v(z_i)$ et $N_i \subset \mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_{10}\}$.
Soit Ω un domaine polygonale de $\mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(\Omega)$.

2. Problème modèle d'ordre quatre

On considère le problème biharmonique sur un domaine polygonal avec des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann homogènes

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & x \in \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce problème peut être résolu numériquement en utilisant des méthodes conformes de classe C^1 . La méthode d'éléments finis basée sur ces éléments (par exemple l'élément Hermite ou l'élément Bogner - Fox - Schmit est compliquée, et encore plus dans la dimension trois.

2.1 Le problème variationnel

Le problème variationnel correspondant à (2.1) est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in (H^2 \cap H_0^1)(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v). \end{cases}$$

Avec :

$$a(u, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 u : \nabla^2 v dx, \quad \text{où } \nabla^2 u : \nabla^2 v = \sum_{i,j=1}^2 \partial_{ij}^2 u \partial_{ij}^2 v.$$
$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

2.2 Le problème discret

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de Ω . On définit l'espace des éléments finis :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}^k(T), (k \geq 2), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \subset H_0^1(\Omega)$$

Alors on définit le **saut** et la **moyenne** sur une arête intérieure e par :

$$[[v]] = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+ \quad \text{et} \quad \{v\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}.$$

Pour les problèmes d'ordre quatre on définit :

$$\left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = n \cdot (\nabla^2 v) n.$$

On définit le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

$$a_h(w, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla^2 w : \nabla^2 v dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right\} \right\} \left[\left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \left[\left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] ds$$

2.3 Estimation d'erreur concrète

Si la solution u du problème (2.1) a la régularité $H^4(\Omega)$ l'orthogonalité de Galerkin et le théorème d'interpolation (en utilisant l'interpolé d'Hermite par exemple) [3] qui affirme l'estimation suivante :

$$h_T^{-2\gamma} \|v - \Pi_h v\|_{L^2(T)}^2 + h_T^{2(1-\gamma)} |v - \Pi_h v|_{H^1(T)}^2 + h_T^{2(2-\gamma)} |v - \Pi_h v|_{H^2(T)}^2 \\ \leq C \|v\|_{H^s(T)}^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \forall v \in H^s(\Omega), \quad s > \frac{5}{2}$$

impliquent l'estimation d'erreur concrète suivante :

$$\|u - u_h\|_h \leq C h^{s-2} |u|_{H^s(\Omega)} \quad 2 < s \leq k+1 \quad (2.3)$$

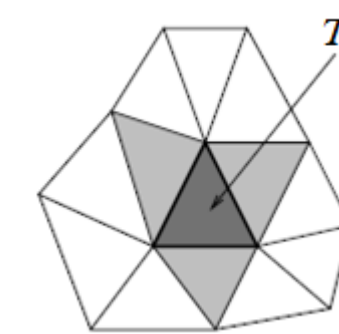
Remarque 2.1 Mais le problème avec cette estimation est le fait qu'elle exige la régularité $H^4(\Omega)$ alors que, la régularité de la solutions faibles du problème (2.1) est seulement H^2 qui nécessite la création d'un interpolé pour les fonctions de classe H^2 avec des estimées analogues à celles de l'interpolé d'Hermite.

3. L'interpolé d'OSWALD

Définition de l'opérateur E_h Soit $v \in V_h$ alors on définit $E_h(v) = w$ par

$$\begin{cases} w(x) = v(x) & \text{si } x \text{ un noeud intérieur} \\ (\nabla w)(x) = \frac{1}{|\mathcal{T}_x|} \sum_{T \in \mathcal{T}_x} \nabla v|_T & \text{si } x \in \mathcal{N}_h / \Gamma \\ \frac{\partial w}{\partial n}(m) = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial n}(m) & \text{si } m \text{ est un point milieu sur } e \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\mathcal{T}_x = \{T \in \mathcal{T}_h \text{ tel que } x \text{ une arête sur } \partial T\}$.



Proposition 3.1 L'opérateur E_h satisfait les propriétés suivantes :

$$h_T^{-2} \|v - E_h(v)\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 |v - E_h(v)|_{H^1(T)}^2 + h_T^4 |v - E_h(v)|_{H^2(T)}^2 \\ \leq C \|v\|_h^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \forall v \in V_h$$

Références

- [1] H.Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson (1983).
- [2] Brenner S., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods (3ed., Springer, 2007).
- [3] J.Blowey and M.Jansen. *frontiers in numerical analysis* (durham 2010)
- [4] P.Clément. Approximation by finite element functions using local regularization.



L'interpolé de Clément

Tabet Lokmane* Merabet I. (encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*tabet91@gmail.com



Résumé

Dans cette présentation on considère le cas un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné et régulier de classe $C^{1,1}$. On s'intéresse à l'interpolation de fonctions peu régulières i.e., de $H^1(\Omega)$ en utilisant l'interpolé de **Clément** ([3]) et à l'utilisation de cet interpolé dans le contexte des éléments finis pour avoir des estimation d'erreur a posteriori.

Mots-Clés : interpolation, espace de Sobolev, analyse a posteriori

1. Introduction

IL est bien connu que pour définir l'interpolé de lagrange d'une fonction, celle ci doit être au moins une fonction continue ([2]). Donc dans le cas d'une dimension, le théorème d'injection de de Sobolov ([1]), donc dans le cas uni-dimensionnel on peut définir L'interpolé d'une fonctions de H^1 . Mais dans le cas bi-dimensionnel, il existe des éléments de H^1 qui ne sont pas continus ; comme il montre l'exemple suivant :

Soit Ω la boule ouverte $B(0; 1/2)$

$$u(x) = \log(\log |x|)$$

Alors u est dans $H^1(B(0; 1/2))$, mais u n'est pas bornée au voisinage de 0. Donc on ne puet pas définir l'interpolé de Lagrange de cette fonction. Nous rappelons que l'interpolé de Lagrange est défini par,

$$\tau_h^1 : C^0(\bar{\Omega}) \ni v \mapsto \sum_{i=1}^{N_{s,i}} v(S_i) \varphi_i \in V_h^1.$$

2. Problème modèle

On considère le problème aux limites suivant :

Soit Ω un ouvert polygonal borné connexe de $\mathbb{R}^2$. On suppose que sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1 Le problème faible

le probleme variationelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} f v, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.2)$$

où nous avons posé

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

2.2 Le problème approché

Le problème approché du problème (2.1) s'écrit dans l'espace V_h définit par :

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T; v_h|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (2.4)$$

D'après le lemme de Céa est théorème de l'interpolation on a

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \leq c' h \|u - \tau_h^1 u\|_{1,\Omega} \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|u\|_{2,T}^2 \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

L'estimation (2.5) n'entre pas dans le cadre des estimations a posteriori, car l'estimation fait intervenir la quantité $\|u\|_{2,T}$ qui est inconue. Alors la régularité des solutions faibles des problèmes elliptiques de second ordre est seulement H^1 qui nécessite la création d'un interpolé pour les fonctions de classe H^1 .

3. L'interpolé de Clément

Soit Ω un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$. Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une fonction famille régulière de Ω . Soit V_h un espace d'approximation construit avec $\mathcal{T}_h$ que nons supposons H^1 -conforme. Soit V_T un élément de $\mathcal{T}_h$ qui ont une intersection non vide avec k . Soit e une aret de T et notons $V(e)$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{T}_h$ qui ont une intersection non vide avec e . On note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des noeuds du maillage.

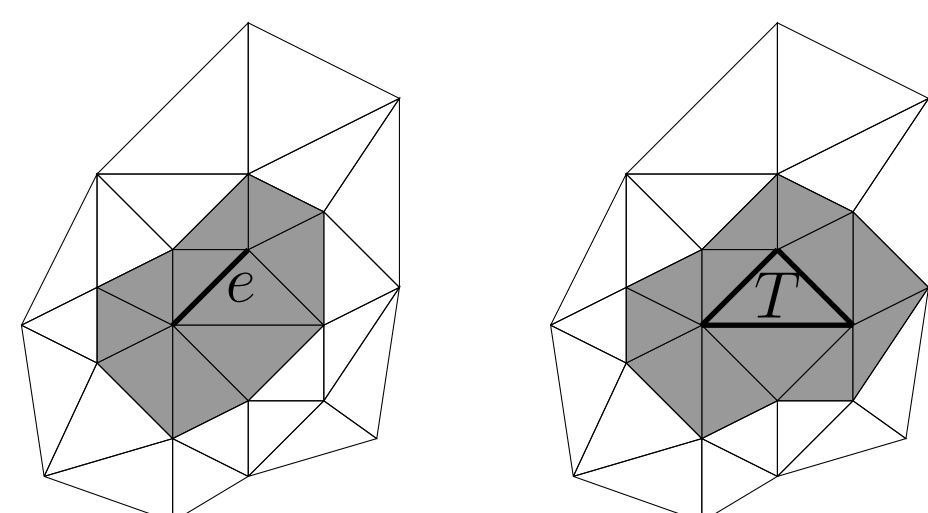


FIGURE 1 : L'ensemble $V(e)$ et l'ensemble $V(T)$

Proposition 3.1 Il existe un opérateur $C_h : H^1(\Omega) \rightarrow V_h^1$ et une constante $c > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \|v - C_h v\|_{0,T} &\leq c h_T \|v\|_{1,V(T)} \\ \|v - C_h v\|_{0,e} &\leq c h_e^{1/2} \|v\|_{1,V(e)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Definition 3.2 Soit $x \in \mathcal{N}_h$. Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on note $\pi_x v \in \mathbb{R}$ la moyenne de v sur l'ouvert V_x . On définit C_h l'opérateur de $H^1(\Omega)$ à valeurs dans V_h par

$$C_h v(x) = \begin{cases} (\pi_x \varphi)(x) & \text{pour tout } x \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma \\ 0 & \text{pour tout } x \in \mathcal{N}_h \cap \Gamma \end{cases} \quad (3.2)$$

4. Estimation d'erreur a posteriori

Definition 4.1 fonction $\eta = \eta(h, u_h, f)$ est appelée erreur a posteriori si

$$\|u - u_h\|_V \leq \eta(h, u_h, f). \quad (4.1)$$

Si $\eta(h, u_h, f)$ se met sous la forme

$$\eta(h, u_h, f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

nous dirons que $\eta_T(u_h, f)$ est un indicateur d'erreur.

La connaissance d'un indicateur d'erreur permet de mettre en ouvre une stratégie d'adaptation de maillage. Heuristiquement, si $\eta_T(u_h, f)$ est grand, nous pouvons envisager de diminuer l'erreur en raffinant le maillage, c'est-à-dire en découpant T en élément plus petits, alors que si $\eta_T(u_h, f)$ est très petit, nous pouvons économiser des degrés de liberté en recombinaut T avec ses voisins.

où nous avons introduit l'indicateur d'erreur

Theorem 4.2 Supposons que la famille $\mathcal{T}_h$ soit régulière. Alors, il existe $c > 0$ telle que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où u est la solution du problème faible et u_h celle du problème discret et nous avons introduit l'indicateur d'erreur

$$\eta_T(u_h, f) = h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial T} |e|^{\frac{1}{2}} \|[\![\partial_n u_h]\!]\|_{0,e}.$$

Dans cette formule, e est une arête de T , ∂T est l'ensemble des arêtes de T qui ne sont pas sur la frontière de Ω , $|e|$ le diamètre de e et $[\![\partial_n u_h]\!]$ le saut de la dérivée normale de u_h à travers e .

Proof : On a la propieté da stabilité, i.e, il existe une constant $\alpha > 0$ telle que :

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u, v)}{\|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}} \geq \alpha. \quad (4.3)$$

Puisque

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \text{ pour tout } v_h \in V_h$$

l'inégalité de stabilité (4.3) donne

$$\forall v_h \in V_h \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h, v - v_h)}{\|v\|_{1,\Omega}}$$

nous pouvons développer le numérateur de second membre comme suit

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v - v_h) &= \int_{\Omega} (-\Delta u)(v - v_h) - \nabla u_h \cdot \nabla (v - v_h) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (f + \Delta u_h) - \sum_{e \in \partial T} \int_e (\partial_n u_h)(v - v_h) \right) \end{aligned}$$

où e désigne une face d'un élément T .

Comme $v - v_h$ est nul sur la bord de Ω , la sommation sur e ne fait intervenir que les faces qui sont communes à deux éléments. Ces faces sont donc des interfaces. Comme $v - v_h$ est continu à travers chaque interface e , il vient :

$$a(u - u_h, v - v_h) \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\|f + \Delta u_h\|_{0,T} \|v - v_h\|_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} 1/2 \|[\![\partial_n u_h]\!]\|_{0,e} \|v - v_h\|_{0,e})$$

où $\mathcal{E}_T^i$ est l'ensemble des faces de T qui ne sont pas sur la frontière. Nous choisissons maintenant $v_h = C_h v$, où C_h est l'opérateur de Clément et en appliquant les estimation de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v - v_h) &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} \|v\|_{0,T} + \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} 1/2 |e|^{1/2} \|[\![\partial_n u_h]\!]\|_{0,e} \|v\|_{0,e}) \\ &\leq \|v\|_{1,\Omega} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} 1/2 |e| \|[\![\partial_n u_h]\!]\|_{0,e}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Alors

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où

$$\eta_T(u_h, f) = h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_T^i} |e|^{\frac{1}{2}} \|[\![\partial_n u_h]\!]\|_{0,e}.$$

Références

- [1] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson (1983).
- [2] Brenner S., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods, (3ed., Springer, 2007).
- [3] Ph. Clément, . Approximation by finite element functions using local regularization. M2AN (1975).



A bilateral contact problem with adhesion and damage between two viscoelastic bodies

Naami maria* Aissaoui A.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*marria43@gmail.com

Abstract

This paper deals with the study of a nonlinear problem of bilateral, frictionless adhesive contact between two viscoelastic deformable bodies with damage. The adhesion process on the common contact surface is modelled by a surface variable, the bonding field, the tangential shear due to the bonding field being included. We obtain an existence and uniqueness result by construction of an appropriate mapping which is shown to be a contraction on a Hilbert space.
Keywords: bilateral frictionless contact; adhesion; elastic materials; fixed point; damage; weak solution.

1. Introduction

Les mathématiques et la mécanique ont été des partenaires complémentaires depuis le temps de Newton, et l'histoire des sciences montre beaucoup de preuves de l'influence bénéfique de ces domaines l'un sur l'autre. Le contact entre corps déformables abondant dans l'industrie et la vie quotidienne. En raison de l'importance industrielle des procédés physiques qui ont lieu lors d'un contact, un effort considérable a été fait dans leur modélisation, l'analyse, analyse numérique et simulations numériques, et par conséquent, la théorie mathématique de la mécanique de contact a fait des progrès impressionnants ces derniers temps. En raison de leur complexité inhérente, les phénomènes de contact conduit à des modèles mathématiques exprimés en termes de problèmes d'évolution fortement non linéaires.

2. Préliminaires

On note par S_3 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur R^3 , Soient Ω^1 et Ω^2 deux domaines bornées de R^3 . Dans la suite, nous employons un indice supérieur ℓ pour indiquer que la quantité est liée au domaine Ω^ℓ ; $\ell = 1, 2$. Pour chaque domaine Ω^ℓ , nous supposons que sa frontière Γ^ℓ est lipschitzienne continue, et divisée en trois parties disjointes mesurables Γ^1 , Γ^2 et Γ^3 , avec $mes(\Gamma^1) > 0$. La normale unitaire extérieur Γ^ℓ est noté par $\nu^\ell = (\nu_i^\ell)$. On utilise les notations

$$\begin{aligned} H^\ell &= \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega^\ell)\} = L^2(\Omega^\ell)^d, \\ H_1^\ell &= \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega^\ell)\}, \\ \mathcal{H}^\ell &= \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega^\ell)\}, \\ V^\ell &= \{v \in H_1^\ell \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell\}. \end{aligned}$$

les espaces H^ℓ , H_1^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$ sont des espaces de Hilbert réels, munis des produits scalaires noté par $(\cdot, \cdot)_{H^\ell}$, $(\cdot, \cdot)_{H_1^\ell}$ et $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}^\ell}$ respectivement.

On définit le produit scalaire sur l'espace V^ℓ par $(u^\ell, v^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}$, $\forall u^\ell, v^\ell \in V^\ell$. Nous rappelons la formule de Green

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div } \sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell.$$

On rappelle que, par le théorème de trace de Sobolev, il existe C_0^ℓ , qui dépend seulement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3^ℓ tel que

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3^\ell)} \leq C_0^\ell \|v^\ell\|_{V^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell,$$

En outre, nous avons besoin de l'espace fonctionnel

$$V = \{v = (v^1, v^2) \in V^1 \times V^2 \mid v_\nu^1 + v_\nu^2 = 0 \text{ sur } \Gamma_3\},$$

3. Formulation du problème mécanique-Hypothèses

Ces deux corps sont encastrés dans $\Gamma_1^\ell \times (0, T)$, soumis une densité de forces volumiques f_0^ℓ qui agissent sur $\Gamma^\ell \times (0, T)$, et des forces surfaciques de densité f_2^ℓ qui agissent sur $\Gamma_2^\ell(0, T)$. Les deux corps sont en contact avec adhésion le long de la partie commune $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$ qui sera noté Γ_3 ci-dessous. On note par u^ℓ les vecteurs des déplacements, et par σ^ℓ le tenseur des contraintes, et par $\varepsilon^\ell = \varepsilon(u^\ell)$ le tenseur de déformation linéarisé.

La formulation classique du problème mécanique de contact bilatéral sans frottement avec adhésion entre deux corps viscoélastiques correspondant est la suivante

Problème P Trouver le champ des déplacements $u = (u^1, u^2)$ tel que $u^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ tel que $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, et le champ endommagement $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$ tel que $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} \sigma^\ell &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \alpha^\ell), & \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \\ \alpha^\ell - k^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\alpha^\ell) &\ni S^\ell(\varepsilon(u^\ell), \alpha^\ell), & \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \\ \text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell &= 0, & \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \\ u^\ell &= 0, & \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \\ \sigma^\ell \nu^\ell &= f_2^\ell, & \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \\ \sigma_\nu^1 &= \sigma_\nu^2, \quad u_\nu^1 + u_\nu^2 = 0, & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ -\sigma_\tau^1 &= \sigma_\tau^2 = p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^2), & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \dot{\beta} &= H_{ad}(\beta, R(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)), & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell} &= 0, & \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \\ u^\ell(0) &= u_0^\ell \quad \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell, & \text{dans } \Omega^\ell, \\ \beta(0) &= \beta_0, & \text{sur } \Gamma_3. \end{aligned}$$

et on suppose que les forces volumiques et la traction surfacique ont la régularité suivante.

$$f_0^\ell \in L^\infty(0, T; H^\ell), \quad f_2^\ell \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d),$$

Finalement, les conditions initiales satisfait

$$u_0^\ell \in V^\ell, \quad \alpha_0^\ell \in K^\ell \quad \beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ a.e. } x \in \Gamma_3.$$

Par le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir l'élément $f(t) \in V$ tel que Nous définissons l'application $f = (f^1, f^2) : [0, T] \rightarrow V$ par l'égalité

$$(f(t), v) = \sum_{\ell=1}^2 \left((f_0^\ell(t), v^\ell)_{H^\ell} + \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da \right)$$

Soit $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$j(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta, u_\tau^1 - u_\tau^2) \cdot (v_\tau^1 - v_\tau^2) da.$$

Alors, la formulation variationnelle du problème mécanique de contact bilatéral sans frottement, avec adhésion entre deux corps viscoélastiques est la suivante.

Problème PV Trouver le champ des déplacements $u = (u^1, u^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{V}$, et le champ des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, et le champ endommagement $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ et le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ telles que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A} \varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G} \varepsilon(u(t), \alpha) \\ \dot{\beta}(t) &= H_{ad}(\beta(t), R(|u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)|)), \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1, \\ (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) &= (f(t), v)_V, \quad \forall v \in V, \\ \alpha(t) &\in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\alpha}^\ell(t), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 (S^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \alpha^\ell(t)), \xi^\ell - \alpha^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \xi \in K \end{aligned}$$

a.e $t \in [0, T]$,

$$u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0.$$

L'étude du problème PV se fait dans la prochaine section, et cela dans plusieurs étapes, et elle est basée sur les résultats des équations différentielles, et l'argument du point fixe.

4. l'existence et résultat d'unicité

Notre résultat principal d'existence et d'unicité est le suivant.

Theorem 4.1 *Sous les hypothèses, le problème PV admet une solution unique $\{u, \sigma, \alpha, \beta\}$ ayant la régularité $u \in L^\infty(0, T; V)$, $\sigma \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$, $\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ $\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$.*

La démonstration du théorème (4.1) se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations d'évolution avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, mais avec un choix différent de l'espace V et de la fonctionnelle j .

References

- [1] A. Aissaoui, N. Hemici, Bilateral contact problem with adhesion and damage, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* No18, 1-16, (2014).
- [2] M. Frémond; *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C. R. Acad. Sci. Paris, 295, Série II, 913-916 (1982).
- [3] M. Frémond, *Adhérence des solides*; J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6, 383-407 (1987).
- [4] N. Hemici, B. Awbi, M. Sofonea; *A viscoelastic frictionless contact problem with normal compliance and adhesion*, Ann. Univ. Bucarest, Math., 51, 145-156 (2002).
- [5] N. Hemici, A. Matei; *A frictionless contact problem with adhesion between two elastic bodies*, Ann. Univ. Craiova, Math. Comp.Sci. ser.Volume 30(2), 90-99 (2003).
- [6] N. Hemici, B. Awbi, M. Sofonea; *Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion*, Annals of University of Bucarest 51 (2002) 131-142.
- [7] N. Hemici, M. Sofonea; *Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhesion*, Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences, (CIMASI 2002), Casablanca (2002), CD-ROM.
- [8] T. Hadj Ammar, B. Benyattou; *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 57(2012), No. 3, 427-444.
- [9] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor; *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman, Hall/CRC Press, New york, 2006.
- [10] N. Strömberg, L. Johansson and A. Klarbring; *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, *Int. J. Solids Structures* **33** (1996), 1817-1836.

Existence de solution pour un certain temps de l'inéquation variationnelle dépendante



Moulay Aicha* Bensayah A.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*moulayaichall@gmail.com

Abstract

Dans cet article, nous étudions l'existence d'une solution pour un exemple de l'inéquation variationnelle parabolique

mot-clés: l'inéquation variationnelle parabolique, la méthode de Roth.

1. Introduction

L'exemple suivant est le déploiement d'un modèle de problème mécanique, On considère le problème pour trouver $u = u(x, t)$ tel que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ u \geq 0; \partial_n u \geq 0; u \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

- On doit prouver l'existence de la solution et pour la preuve On utilise la méthode de Roth.

2. Problème classique

Trouver u telle que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ u \geq 0; \partial_n u \geq 0; u \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

ou $u : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto u(x, t)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\partial\Omega$ assez régulière, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$

3. Problème variationnel

$$\begin{cases} [u'(t), v - u] + [Au, v - u] \geq [f, v - u] \\ u(t); v(t) \in K_{p,p} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$[\cdot, \cdot]$ = produit scalaire dans $L^2(0, T, H)$ ou entre $L^2(0, T, V)$ et $L^2(0, T, V')$.

et $V = H_{\Gamma_0}^1 = \{v \in H^1/v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$; $H = L^2(\Omega)$; $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$

$K = \{v \in V/v \geq 0 \text{ on } \Gamma\}$

4. L'existence de solution

4.1 Problème discret

Pour chaque $i = 1, 2, \dots$ On considère le problème pour trouver la solution $u_i \in K$ de

$$\left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, v - u_i \right\rangle + a(u_i, v - u_i) \geq (f, v - u_i) \quad \forall v \in \Omega \quad (4.1)$$

l'inéquation (4.1) $\iff$ de

$$\frac{1}{h} \langle u_i - f, v - u_i \rangle + a(u_i, v - u_i) \geq \frac{1}{h} \langle u_{i-1}, v - u_i \rangle \quad (4.2)$$

Observe que u_{i-1} savoir à pour chaque étape, et construire la fonction de Roth

$$u_n(x, t) = u_{i-1}(x) + \frac{t - t_{i-1}}{h} (u_i(x) - u_{i-1}(x)) \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (4.3)$$

- Pour montrer que $u_n(x, t)$ convergent à une solution $u(x, t)$ Quand $n \rightarrow \infty$ de

$$\left\langle u'(t) - f, v(t) - u(t) \right\rangle + a(u(t), v(t) - u(t)) \geq 0 \quad (4.4)$$

- Nous établissons quelque estimation nécessaire.

- Pour $i = j - 1$ Nous prenons $v = u_j$ dans l'inéquation (4.1) et pour $i = j$ on prenons $v = u_{j-1}$ pour produire

$$\left\langle \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{h} - f, u_j - u_{j-1} \right\rangle + a(u_{j-1}, u_j - u_{j-1}) \geq 0 \quad (4.5)$$

$$-\left\langle \frac{u_j - u_{j-1}}{h} - f, u_{j-1} - u_j \right\rangle + a(u_j, u_{j-1} - u_j) \geq 0 \quad (4.6)$$

On additionne (4.5) et (4.6) on trouve

$$\frac{1}{h} \|u_j - u_{j-1}\|^2 + \|\nabla(u_j - u_{j-1})\|^2 \leq \frac{1}{h} \langle u_{j-1} - u_{j-2}, u_j - u_{j-1} \rangle \quad (4.7)$$

à partir de laquelle nous obtenons

$$\|u_j - u_{j-1}\|^2 + h \|\nabla(u_j - u_{j-1})\|^2 \leq \|u_{j-1} - u_{j-2}\|^2 \quad j \geq 2 \quad (4.8)$$

On applique l'inégalité de Cauchy Schwartz et utilise l'inégalité élémentaire $2ab \leq a^2 + b^2$ pour le cas $j = 1$, On choisit $v = u_0$ dans (4.1) pour obtenir

$$\frac{1}{h} \|u_1 - u_0\|^2 + \|\nabla(u_1 - u_0)\|^2 \leq |\langle \nabla u_0, \nabla(u_1 - u_0) \rangle| \quad (4.9)$$

Si la donnée initiale $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1$ l'intégration par parties révèle que

$$|\langle \nabla u_0, \nabla(u_1 - u_0) \rangle| \leq |\langle \Delta u_0, u_1 - u_0 \rangle| \leq \|\Delta u_0\| \|u_1 - u_0\|.$$

afin que nous ayons la borne de base $\|\frac{u_1 - u_0}{h}\| \leq \|\Delta u_0\|$ combinant cette estimation à l'inégalité (4.8) montre que

$$\|\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\| \leq c \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

4.1.1 L'estimation a priori

- Pour c une constante qui est indépendante de n , on choisit $v = 0$ dans (4.1), une borne similaire impliquant la norme suivante:

$$\|u_i\|_V \leq c \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

- ces obligations de fournir une estimation uniforme sur la dérivée u'_n depuis $u'_n = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$

- donc (4.10) dit que

$$\|u'_n\| \leq C \text{ pour } t \in [0, T] \quad (4.12)$$

- qui donne immédiatement le résultat de équicontinuité $u_n(t) - u_n(\tau) \leq c|t - \tau|$ pour $t, \tau \in [0, T]$ - pour la famille $u_{n,n} \in \mathbb{N}$ le théorème de Arzela-Ascoli et l'intégration compacte de H_0^1 vers $L^2(\omega)$ puis la garantie que u_n converge vers une fonction u dans l'espace $C([0, T], L^2(\omega))$, En fait u est lipschitzienne et donc différentiable presque partout dans $[0, T]$.
- Il reste à démontrer que la limite u résout le problème variationnel (4.4), pour accomplir cette, On définit $\bar{u}_n(t)$ comme la fonction de l'étape

$$\bar{u}_n(t) = u_i \text{ pour } t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (4.13)$$

- ensuite de (4.11) que $\{\bar{u}_n\}$ à une suite qui converge faiblement dans H_0^1 . que nous marquons que $\{\bar{u}_n\}$ on outre (4.10) donne la borne $|\bar{u}_n(t) - u_n(t)| \leq \frac{c}{n}$
- D'où il se ensuit que la limite faible de cette séquence est u en exploitant la borne (4.12) d'une manière similaire

4.1.2 Passage à la limite

On voit que u'_n converge faiblement vers u' dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$

- en fonction de u_n et $\bar{u}_n$, l'inéquation variationnelle elliptique (4.1) est:

$$\langle \bar{u}_n(t) - f, v(t) - \bar{u}_n(t) \rangle + a(\bar{u}_n(t), v(t) - \bar{u}_n(t)) \leq 0 \quad \forall v \in K \quad (4.14)$$

- qui détient presque partout dans $[0, T]$, pour les points arbitraires τ_1 et τ_2 dans $[0, T]$, on intègre (4.14) à partir de τ_1 à τ_2 donne

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle u'_n(t) - f, v(t) - \bar{u}_n(t) \right\rangle e + a(\bar{u}_n(t), v(t) - \bar{u}_n(t)) dt \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (4.15)$$

- On prend $\liminf$ quand $n \rightarrow \infty$ dans cette inéquation on trouve

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle u'(t) - f, v(t) - u(t) \right\rangle + a(u(t), v(t) - u(t)) dt \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (4.16)$$

Quand $\bar{u}_n \rightarrow u$ et $u'_n \rightharpoonup u'$ dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ et la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est faiblement semi-continue.

alors u est solution de le problème variationnelle

References

- [1] H. Brézis. Analyse Fonctionnelle. Masson(1983).
- [2] J.L. Lions. Numerical Analysis of variational inequalities, Paris 1976.
- [3] R. Glowinski. Lecturer on Numerical Methods for Non-linear variational problems. Berlin Heidelberg New York(1980).
- [4] Jacques Louis Lions. Sur les problèmes unilatéraux(1968)
- [5] Mathew Rudd and Klaus schmitt. Variational Inequalities of Elliptic and parabolic Type(2002).
- [6] H. Brézis. Équation et inéquation non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. Ann. Ins. Fourier, 18(1968), pp.115-175.
- [7] R. Glowinski. Numerical Methods for Non linear variational problems. Howston. TX77004-3008. USA, 1984.

Discrétisations spectral des équation de Laplace avec conditions aux limites de Dirichlet



Messaoudi Abdel-djalil* Bennour H.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*mess91mess@gmail.com

Abstract

Les discrétisations spectrales des équations aux dérivées partielles reposent sur le degré élevé des approximations polynomiales et sur l'utilisation des bases tensoriels des polynômes. D'abord, sur l'intervalle Λ ou sur le carré Λ^2 , nous avons décrit les outils de base des méthodes spectrales, et nous avons prouvé certaines propriétés optimales des approximations et d'interpolations polynomiales. Enfin, nous les avons appliquées à l'analyse spectrale de la discrétisation des équations de Laplace.

1. Introduction

Les techniques spectral sont des méthodes d'ordre élevé qui permettent soit obtenir des résultats très précis ou de réduire le nombre de degrés de liberté pour une précision standard fixe. Nous mentionnons les prévisions de la météorologie et de la simulation directe de turbulence entre les applications les plus complexes. En tant que premier, ils s'appuient sur un degré élevé des approximations polynomiales par morceaux, et sur l'utilisation de bases tensorielles des polynômes. Pour ces raisons, les géométries de base de ces méthodes sont tensoriels, c'est à dire qu'ils sont carré ou cube. Nous nous référons à [31], [41] et [22] pour une présentation générale et une analyse des méthodes spectrales dans ces géométries, et aussi [37], [69] et [34] pour extensions loin à triangles. Les espaces discrets pour les méthodes spectrales sont simplement des espaces des polynômes, et le paramètre de discrétisation est le degré maximal de ces polynômes. La discrétisation est de type Galerkin, c'est-à-dire qu'elle s'appuie sur la formulation variationnelle du problème continu: le problème discret est construit en remplaçant l'espaces fonctionnels par des espaces discrets et les intégrales par des formules quadratures tensorielles appropriées. Son analyse numérique s'appuie principalement sur les résultats de la meilleure approximation polynomiale et aussi d'interpolation polynomiale aux nuds de la formule. Nous avons décrit et analyser la discrétisation d'équation de Laplace, et nous présente son implémentation. Nous nous référons à [22] Pour une analyse plus complète de ces techniques, et aussi pour [56], [67] et [40] pour plus de détails sur la mise en uvre. Nous présentons la méthode spectrale dans le carré $\Omega =]-1, 1[^d$, $d = 2$. Même si cette technique peut évidemment être tendue à des domaines qui sont les images de Ω par fonctions lisses, par exemple quadratures convexes, l'idée principale dans ce cas est de revenir au domaine de référence Ω , de sorte que seuls certains autres arguments techniques apparaissent. Nous choisissons d'éviter eux.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à donner quelque notions et préliminaires, qui décrivent les outils de base pour les techniques spectrales: on va définir l'espace discret correspondant, on introduit les bases sur les polynômes orthogonaux; les polynômes de Legendre, ensuite on décrit les formules de quadratures qui sont employées pour évaluer les intégrales intervenant dans la formule variationnelle.

Dans le deuxième chapitre, on introduit quelques résultats de l'approximation polynomiale, et certains résultats de l'interpolation polynomiale sur l'intervalle Λ puis sur le carré Λ^2 .

Dans le dernier chapitre, nous appliquons l'analyse de la discrétisation spectrale à l'équation de Laplace sur le carré par la méthode de Galerkin. Finalement, on estime l'erreur entre la solution exacte et approchée à la meilleur approximation de la solution dans l'espace discrétisé et à l'erreur d'interpolation aux nuds de collocation sur le second membre de l'équation.

2. Preliminaries

Lemma 2.1 Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit L_n un polynôme non nul de degré n qui soit orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ pour le produit $L^2(\Lambda)$. Alors

- 1) L_n à la parité de son degré: $L_n = (-1)^n L_n$
- 2) Les zéros de L_n sont réels strictement compris entre -1 et 1.

proof 2.2 1) Le polynôme $\tilde{L}_n$ définie par $\tilde{L}_n = L_n(-x)$ est lui aussi orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ et de degré n . Donc $\tilde{L}_n$ est proportionnel à L_n . Comme la symétrie est involution, $\tilde{L}_n$ est en fait égale à $+L_n$ ou à $-L_n$ et comme le degré de L_n égale n on obtient(1)

2) Soit l la nombre de zéros du polynôme L_n qui sont distinct strictement compris entre -1 et 1 et d'ordre impair. Soit $x_1, \dots, x_l$ les zéros du L_n si $l < n$ les polynômes L_n est orthogonal à tous les polynômes des degré $\leq n-1$ alors $\int_{-1}^1 L_n(x)(x-x_1)\dots(x-x_n)dx = 0$ ceci impossible car la fonction intègre ne change pas de signe donc $l = n$ ceci montre que L_n ne s'annulent pas en -1 et 1 alors on peut définir les polynômes de Legendre.

Proposition 2.3 Soit N entier positif, il existe un unique ensemble de N points ε_j , $1 \leq j \leq N$ et il existe un unique ensemble de N réels ω_j , $1 \leq j \leq N$ tel que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$

$$\int_{\Lambda} \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^N \Phi(\varepsilon_j)\omega_j \quad (2.1)$$

Les nuds sont les zéros ε_j , $1 \leq j \leq N$ de L_N et les poids ω_j , $1 \leq j \leq N$ sont positifs

proof 2.4 Soit h_j les polynômes de Lagrange associés aux ε_j , $1 \leq j \leq N$ c'est à dire que h_k , est l'unique polynôme de degré $N-1$ qui vaut 1 en ε_k et 0 en les autres ε_j , $j \neq k$. Les h_k , $1 \leq k \leq N$, forment une base de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$. On pose

$$\omega_k = \int_{\Lambda} h_k(\varepsilon)d\varepsilon, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Il set alors évident que la formule d'intégration

$$\int_{\Lambda} \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^N \Phi(\varepsilon_j)\omega_j$$

est vraie pour tout les h_k , $1 \leq k \leq N$ et donc par combinaison linéaire, pour tout $\Phi \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$. soit maintenant $\Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. par division euclidienne par L_N , Φ s'écrit $\Phi = QL_N + R$, avec $Q, R \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ comme L_N est orthogonal à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$

$$\int_{\Lambda} \Phi(x)dx = \int_{\Lambda} Q(x)L_N(x)dx + \int_{\Lambda} R(x)dx = \int_{\Lambda} R(x)dx$$

d'où, comme $R \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$

$$\int_{\Lambda} \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^N R(\varepsilon_j)\omega_j \quad (2.2)$$

or $\Phi(\varepsilon_j) = Q(\varepsilon_j)L_N(\varepsilon_j) + R(\varepsilon_j)$, et comme les $L_N(\varepsilon_j)$ sont tous nuls, $\Phi(\varepsilon_j) = R(\varepsilon_j)$, $1 \leq j \leq N$ ainsi on a obtenu(2.1)

pour montrer que les ω_j sont positifs, il suffit de remarquer que pour tout $1 \leq k \leq N$ $h_k^2 \in \mathbb{P}_{2N-2}(\Lambda)$ la formule (2.1) donne alors

$$\int_{\Lambda} h_k^2(x)dx = \sum_{j=1}^N h_k^2(\varepsilon_j)\omega_j = \omega_k > 0$$

References

- [1] C. Bernardi, Y. Maday Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques, Mathématiques et Applications 10, SMAI, Springer-Verlag, Paris (1992).
- [2] C. Bernardi, Y. Maday Some spectral approximations of one-dimensional fourth-order problems, Progress in Approximation Theory, 'edité par P. Nevai, A. Pinkus, Academic Press, San Diego (1991), 43116.
- [3] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday Polynomials in Weighted Sobolev Spaces: Basics and Trace Liftings, Internal Report 92039, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1992).
- [4] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).
- [5] M. Dauge Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains, Lecture Notes in Mathematics 1341, Springer-Verlag (1988).
- [6] P. Grisvard Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman (1985).
- [7] Y. Maday, A.T. Patera Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations, in State of the Art Surveys in Computational Mechanics, A. K. Noor ed. (1989), 71143.
- [8] E. M. Rønquist Optimal Spectral Element Methods for the unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA. (1988)

STUDY OF THE GLOBAL EXISTENCE OF A REACTION-DIFFUSION SYSTEM



Mammeri Fouzia* Dadi O. E.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*fozamath22@gmail.com

Abstract

The goal of this work is to study the existence of solution to the following problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Lambda - f(u, v) - \alpha u & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u, v) - \sigma v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases}$$

with homogeneous Neumann boundary conditions

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$$

and non-negative bounded initial data

$$u(0, x) = u_0(x) \quad v(0, x) = v_0(x) \quad \text{in } \Omega$$

Where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is bounded domain of class C^1 , the constants a, b, d, Λ , and μ are positive numbers.

the non-linearities f, g are assumed to be a non-negative and continuously differentiable functions on $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

Keywords: reaction-diffusion systems, Lyapunov functional, global existence.

1. Modelisation

A reaction-diffusion system is a mathematical model that describes the evolution of the concentrations of one or more spatially distributed substances and is subject to two transform process: a process of local (chemical) reactions, wherein the different substances, and a diffusion process which causes a breakdown of these substances in the space. Used in other fields, including biology, physics, geology and ecology and mathematically, reaction-diffusion systems are represented by semi linear parabolic partial differential equations which take the general form:

$$\frac{dq}{dt} = D\Delta q + R(q)$$

q represents the concentration of a substance, D is a diagonal matrix of diffusion coefficients, R represents all local reactions.

2. Examples

Among the uses we mention the following:

1) Predator-prey:

A predator population y eats from a prey population x , the most famous predator prey model (LotkaVolterra) reads:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

2) models of spreading AIDS:

The following system describes an epidemic model representing the spread of infectious disease within a population:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) = D\Delta S(x, t) + \Pi - C(T)\frac{SI}{T} - \alpha, \\ \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = D\Delta I(x, t) + C(T)\frac{SI}{T} - \sigma I, \end{cases}$$

S denotes the number of susceptible individuals
 I those infectious individuals

$D \geq 0$ is the diffusion coefficient that is a constant



Figure 1: AIDS spread in the world

3. The class of our problem

We consider the following reaction-diffusion system

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Lambda - f(u, v) - \alpha u & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u, v) - \sigma v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases}$$

with homogeneous Neumann boundary conditions

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$$

and non-negative bounded initial data

$$u(0, x) = u_0(x) \quad v(0, x) = v_0(x) \quad \text{in } \Omega$$

Among the authors who investigate in this problem are:

In the Diagonal system (i.e, $b = 0$)

L.Melkemi et al [5] find a positive answer under the following conditions:

1. $f(0, \cdot) = 0 \quad g(\cdot, 0) \geq 0$,
2. $f(u, v) \leq (1 + v)^\beta \varphi(u) \quad \beta \geq 1$,
3. $g(u, v) \leq \Psi(v)f(u, v)$,
4. $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(v)}{v} = 0 \quad \varphi, \Psi \in C(\mathbb{R}^+)$,

the same authors in [8] generalize their results under the following conditions:

1. $g(u, v) = f(u, v) = \lambda(t)h(u, v) \quad \lambda$ is bounded function in $C(\mathbb{R}^+)$,
2. $h(u, v) \leq \Psi(u)\varphi(v)$,
3. $\Psi(0) = 0 \quad \varphi(0) = 0$,
4. $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \varphi(v))}{v} = 0$,

E.Daddiouaissa [7] gave a result for the following conditions:

1. $f = g \quad f(0, v) = 0$,
2. $f(u, v) \leq \varphi(u)(v + 1)^\lambda e^{rv}$,
3. $K(v) = v^\mu \quad \mu \geq 1$,
4. $\max(\|u_0\|, \frac{\Lambda}{\alpha}) < \frac{\Theta^2}{2 - \Theta} \frac{8ab}{rn(a - b)^2}$.

In the triangular system (i.e, $b > 0$)

1)case $d > a$

Salem and Youkana [9] find a global solution under the following conditions:

1. $d - a \geq b \quad \alpha = \sigma$,
2. $g(u, v) = f(u, v) = \lambda(t)h(u, v) \quad \lambda$ is bounded function in $C(\mathbb{R}^+)$ $h(0, v) = 0$
3. $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + h(u, v))}{v} = 0$,

S.Abdelmalek et al [2] gave a positive result under the following conditions:

1. $d - a \geq b \quad \alpha = \sigma$,
2. $f = g \quad f(u, v) \leq \varphi(u)e^{\alpha v}, \varphi(0) = 0$,
3. $v_0 \geq \frac{b}{d - a}(L(0) - u_0)$,

4. $\max(\|u_0\|_\infty, \frac{1}{\mu}) = K < M < \frac{\gamma}{\alpha p} \quad \gamma \leq (\frac{2\sqrt{ad}}{a - d})^2$.

B.Rebiai [10] find a global existence under the following conditions:

case $\alpha = \sigma$,

1. $f(0, v) = 0 \quad g(u, \frac{b}{d - a}(\frac{\Lambda}{\mu} - u)) \geq \frac{b}{d - a}f(u, \frac{b}{d - a}(\frac{\Lambda}{\mu} - u))$,
2. $g(u, v) \leq \Psi(v)f(u, v)$,
3. $\exists \beta > 0$,
4. $\lim_{v \rightarrow +\infty} v^\beta \Psi(v) = l$,
5. $\|u_0\| \leq \frac{\Lambda}{\mu} \quad v_0 \geq \frac{b}{d - a}(\frac{\Lambda}{\mu} - u_0)$.

the same author in [4] generalize their results under the following conditions:

a)case $d - a \leq b \quad \alpha = \sigma$,

1. $f(0, v) = 0 \quad f(u, v) \geq 0 \quad f(u, \frac{b}{d - a}(\frac{\Lambda}{\mu} - u)) = 0$,

2. $\|u_0\| \leq \frac{\Lambda}{\mu}$,

b)case $d - a > b \quad \alpha = \sigma$,

1. $f(u, v) \leq c\varphi(u)v^r e^{\alpha v} \quad \alpha > 0 \quad r \geq 0 \quad \varphi(0) = 0$,

2. $\|u_0\| \leq \frac{\Lambda}{\mu} < \frac{8ad}{\alpha n(a - d)^2}$,

3. $v_0 \geq \frac{b}{d - a}(\frac{\Lambda}{\mu} - u_0)$.

2) case $a > d$

E.Daddiouaissa [3] finds a positive answer for the following conditions:

case $\alpha \neq \sigma$,

1. $f(u, v) \leq \varphi(u)(u + v)^r \quad r \geq 0$,
2. $g(u, v) \leq \Psi(v)f(u, n) + \Phi(v)$,
3. $g(u, \frac{b}{a - d}u) + \frac{b}{a - d}f(u, \frac{b}{a - d}u) \geq \frac{b}{a - d}[(\sigma - \alpha)u + \Lambda]$.

4. our aim or goal

Our aim is to study this problem when we have a change in the medium's characteristics

References

- [1] Global classical solutions for reaction-diffusion systems with non linearities of exponential growth [BELGACEM REBIAI and SAID BENACHOUR].
- [2] ALYapunov functional for a triangular reaction-diffusion system with nonlinearities of exponential growth [S.Abdelmalek,M,Kirane and A,Youkana].published online 9 July 2012 in wiley online library.
- [3] Existence of Global solutions for a system of Reaction-Diffusions Equations Having A triangular Matrix. Electronic Journal of Differential Equations,Val 2008,ISSN: 1072-6691. [EL HACHEMI DADDIOUAISSA].
- [4] Global classical solutions for reaction-diffusion systems with A triangular Matrix of diffusion coefficients. Electronic Journal of Differential Equations,Val 2011,ISSN: 1072691.[BELGACEM REBIAI].
- [5] on the uniform boundedness of the solutions of system of Reaction-Diffusions Equations .Electronic Journal of qualitative theory of differential Equations 2005.No 24.1.10.[lamine MELKEMI,Ahmed Zerrouk MOKRANE and Amar YOKANA].
- [6] on the role of long incubation periods in the dynamics of acquired syndrome(AIDS).Journal of Mathematical Biology Springer-Verlag 1989.[C. Castillo-Chavez '2, K. Cooke 5, W. Huang 6, and S. A. Levin 2-4]
- [7] Existence of Global solutions for a system of Reaction-Diffusions Equations With EXPONENTIAL NONLINEARITY .Electronic Journal of qualitative theory of differential Equations 2009,No 73. [EL HACHEMI DADDIOUAISSA]
- [8] Roundedness and Large-Time Behavior Results for a Diffusive Epidemic Model [Lamine Melkemi, Ahmed Zerrouk Mokrane, and Amar Youkana] Received 7 February 2006; Revised 8 November 2006; Accepted 3 April 2007 Recommended by Karl Kunisch
- [9] Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 5, 2011, no. 9, 425 - 432 Global Existence of Solutions for Some Coupled Systems of Reaction-Diffusion,[Abdelmalek Salem] University of Tebessa, 12002 Algeria [Youkana Amar] University of Batna, 5000 Algeria
- [10] Global Classical Solutions for Coupled Reaction-Diffusion Systems without Growth Conditions on the Nonlinearities University of Tebessa 12002, Algeria,Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 5, 2011, no. 20, 1003 - 1010 [Belgacem Rebiai]
- [11] Wikipedia This page was last modified September 24, 2013 at 5:16.

Méthode d'éléments finis mixte pour les équations de Marguerre-von Kármán



Laheg Naziha* Ghezal A.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*naziha.laheg@gmail.com

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de l'approximation numérique des solutions non-triviales des équations de Marguerre-von Kármán pour le flambage d'une coque peu-profonde encastrée. On propose une méthode d'éléments finis mixte. On généralise le résultat obtenu par Kesaven [1] pour les équations de von Kármán.

Mots clés:

Elasticité non linéaire, Théorie de coque peu-profonde, Méthode d'éléments finis mixtes, Équations de Marguerre-von Kármán.

1. Introduction

Dans cet travail on s'intéresse au calcul des branches de bifurcation (à partir de la solution triviale $\zeta = 0$) des équations de Marguerre-von Kármán, ces équations, qui sont un modèle pour le flambage d'une coque peu-profonde encastrée à de forces latérales, s'écrivent:

$$\begin{cases} \Delta^2 \zeta = [\phi, \zeta + \theta] + \lambda[f, \zeta + \theta] & \text{dans } \omega, \\ \Delta^2 \phi = -[\zeta, \zeta + 2\theta] & \text{dans } \omega, \\ \zeta = \partial_\nu \zeta = \phi = \partial_\nu \phi = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases} \quad (1)$$

où f fonction donnée et λ entier positive, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné, ζ le déplacement, $\zeta, \phi: \omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta \in H^2(\omega)$ définit la surface moyenne de la coque et γ sa frontière par ailleurs,

$$[\eta, \zeta] = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Les importants références dans ce travail est Kesaven [1], Brezzi [2], Miyoshi [3], Ciarlet [4].

Notation:

On utilise les espaces de Lebesgue $L^p(\omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ et les espaces de Sobolev $H^m(\omega)$. la norme dans L^p est désignée par $|\cdot|_{0,p,\omega}$ sauf si $p = 2$ quand nous écrivons $|\cdot|_{0,\omega}$. la norme et semi-norme habituelles dans $H^m(\omega)$ respectivement désignées par $\|\cdot\|_{m,\omega}$ et $|\cdot|_{m,\omega}$. Tout espace produit est muni de la norme produit correspondante mais on continuera à la désigner comme dans le cas scalaire.

2. Les problèmes linéarisé

Théorème 2.1 Soit $(\sigma, \zeta, \lambda) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} \times \mathbb{R}^2$ une solution du problème de valeur propres on a:

$$(\tilde{P}V) \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma, \zeta, \lambda) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} \times \mathbb{R}^2 \text{ tels que} \\ \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, \zeta) = 0, \\ \forall v \in \tilde{V}, -\tilde{b}(\sigma, v) = \lambda \int_{\omega} [f, \sigma + \theta] v dx. \end{cases} \quad (2)$$

et le problème discret s'écrit:

$$(PV_h) \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma_h, \zeta_h, \lambda_h) \in \Sigma_h \times V_h \times \mathbb{R}^2 \text{ tels que} \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h, a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, \zeta_h) = 0, \\ \forall v_h \in V_h, -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \lambda_h \int_{\omega} [f, \sigma_h + \theta] v_h dx. \end{cases} \quad (3)$$

3. Le problème non linéaire continue

Théorème 3.1 Le triple $\{(\phi, y), (\sigma, \zeta), \lambda\}$ est une solution du problème suivant:

$$(\tilde{P}N) \begin{cases} \text{Trouver } ((\phi, y) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V}, (\sigma, \zeta)) \in \tilde{\Sigma} \times \tilde{V} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que} \\ \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, a(\phi, \tau) + \tilde{b}(\tau, y) = 0, \\ \forall v \in \tilde{V}, -\tilde{b}(\phi, v) = -\int_{\omega} [\sigma, \sigma + 2\theta] v dx, \\ \forall \tau \in \tilde{\Sigma}, a(\sigma, \tau) + \tilde{b}(\tau, \zeta) = 0, \\ \forall v \in \tilde{V}, -\tilde{b}(\sigma, v) = \lambda \int_{\omega} [f, \sigma + \theta] v dx + \int_{\omega} [\phi, \sigma + \theta] v dx, \end{cases} \quad (4)$$

où les espaces $\tilde{\Sigma}, \tilde{V}$ sont définis: $\tilde{\Sigma} = (H^1(\omega))_s^4, \tilde{V} = H_0^1(\omega)$.

4. Le problème non linéaire discret

On utilisera par la suite les espaces Σ_h et V_h décrits ci-après. Pour simplifier l'exposé, supposons que ω est un polygone convexe. On se donne une famille régulière de triangulations $\{F_h\}_h$ de ω et on définit:

$$W_h^K = \{v_h \in C^0(\bar{\omega}) \mid \forall K \in F_h, v_h|_K \in P_K(K)\}, \quad (5)$$

l'espace associé aux polynômes de degré $\leq K$, par élément fini de Lagrange de type (K) . On pose

$$\Sigma_h = (W_h^K)_s^4, V_h = W_h^K \cap H_0^1(\omega), K \geq 2. \quad (6)$$

Théorème 4.1 Donc l'analogue discret du problème non linéaire $(\tilde{P}N)$ s'écrit:

$$(PN_h) \begin{cases} \text{Trouver } ((\phi_h, y_h) \in \Sigma_h \times V_h, (\sigma_h, \zeta_h)) \in \Sigma_h \times V_h \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que} \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h, a(\phi_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, y_h) = 0, \\ \forall v_h \in V_h, -\tilde{b}(\phi_h, v_h) = -\int_{\omega} [\sigma_h, \sigma_h + 2\theta] v_h dx \\ \forall \tau_h \in \Sigma_h, a(\sigma_h, \tau_h) + \tilde{b}(\tau_h, \zeta_h) = 0, \\ \forall v_h \in V_h, -\tilde{b}(\sigma_h, v_h) = \lambda_h \int_{\omega} [f, \sigma_h + \theta] v_h dx + \int_{\omega} [\phi_h, \sigma_h + \theta] v_h dx. \end{cases} \quad (7)$$

5. Estimations d'erreur

Théorème 5.1 On suppose que $\zeta_0 \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de ε telle que, pour ε assez petit,

$$|\sigma - \sigma_h|_{0,\omega} + |\zeta - \zeta_h|_{1,\omega} \leq Ch + Ch^2\varepsilon + s_h, \quad (8)$$

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2 + Ch\varepsilon + s_h + Cr_h + C\varepsilon s_h, \quad (9)$$

où $r_h \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ et $s_h \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Références

- [1] S. Kesaven, Une méthode d'éléments finis mixte pour les équations de von Kármán, RAIRO Anal. Numér., 14(2), (1980), 149-173.
- [2] F. Brezzi et P.A. Raviart, Mixed Finite Element Methods for Fourth Order Elliptic Equations, Rapport Interne, n 9, École polytechnique, palaiseau, (1976).
- [3] T.Miyoshi, A Finite Element Method for the Solution of Fourth Order Partial Differential Equations, Kumamoto J.Sc.(Math.), vol. 9, (1973), p. 87-116.
- [4] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, (1978).

Problème d'un écoulement au-dessus d'un obstacle sans l'effet de gravité



Kherfi Salima* Amara A.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*salima.kherfi2014@gmail.com

Abstract

Dans ce travail, on s'intéresse à un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus des obstacles. Le problème est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre qui est de forme inconnue. Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre. Nous utilisons d'abord la technique de transformation Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte

Mots-clés: Écoulement à surface libre, tension de surface, nombre de Froude.

1. Introduction

Notre objectif dans ce papier, on étudie un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel, d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au dessus d'un obstacle de hauteur $2H$ et de largeur H , en raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe $y'oy$, on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan. Le plan des variables (x, y) de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$, en négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'holographe dû à Kirchhoff (1869) ou la transformation Schwarz-Christoffel

2. Formulation du problème

On considère un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel sur le plan horizontal d'un fluide incompressible et non visqueux, au dessus d'un obstacle de La longueur est H et de largeur H . Nous choisissons comme repère de référence la ligne OB sur l'axe $x'ox$, la ligne AO sur l'axe $y'oy$, la surface libre sur la ligne de courant CD . (voir Figure 1(b)).

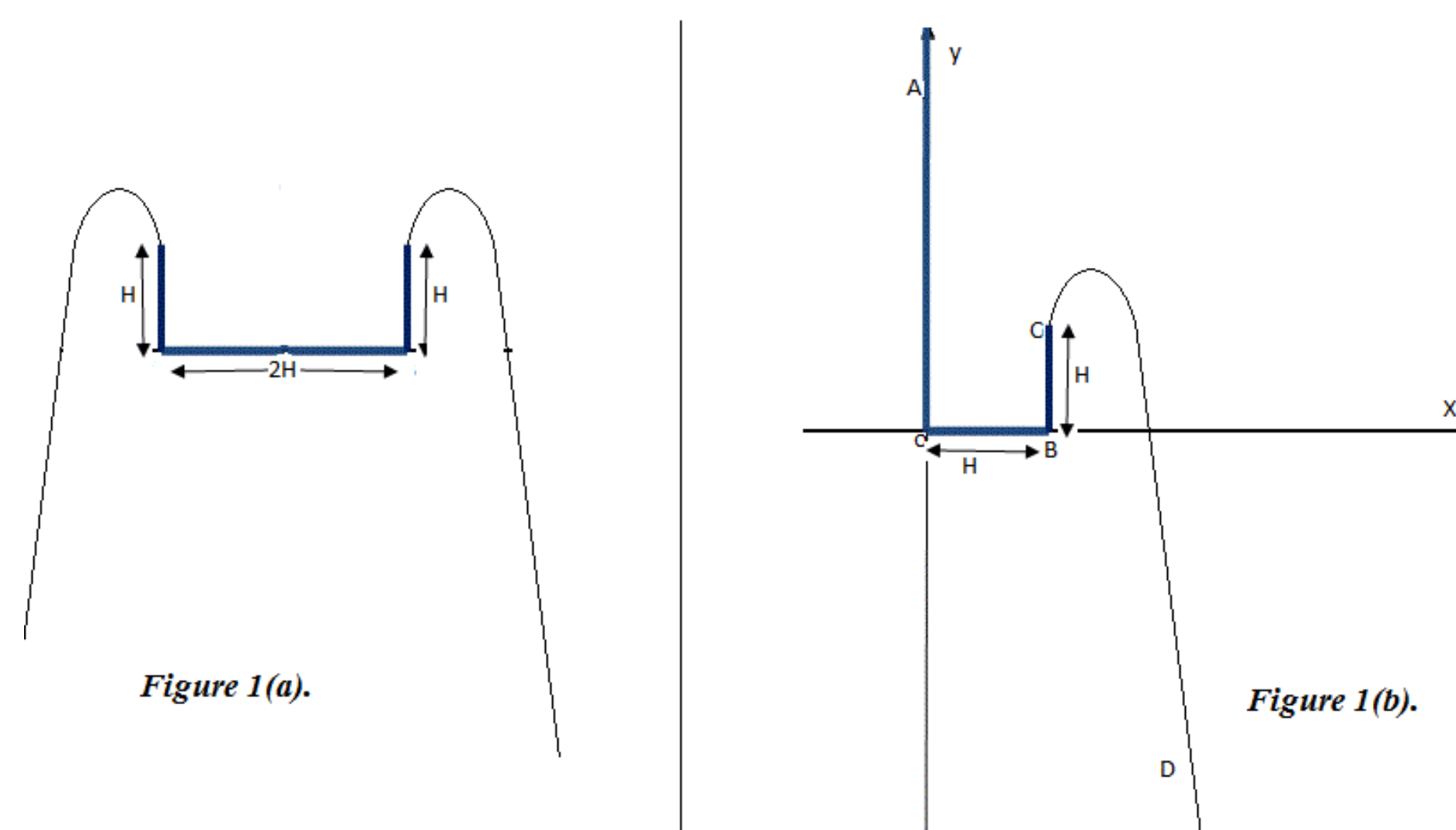


Figure 1: Schéma de l'écoulement et des coordonnées. La longueur de l'obstacle est $2H$ et de largeur H figure 1(a), et La longueur de l'obstacle est H et de largeur H . La surface libre est CD figure 1(b)

On suppose que l'écoulement est uniforme lorsque $|y| \rightarrow \infty$ de vitesse U . On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe z au plan de l'écoulement f ou $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ tels que les points A, O, B, C et D dans plan complexe z . (figure 2.)

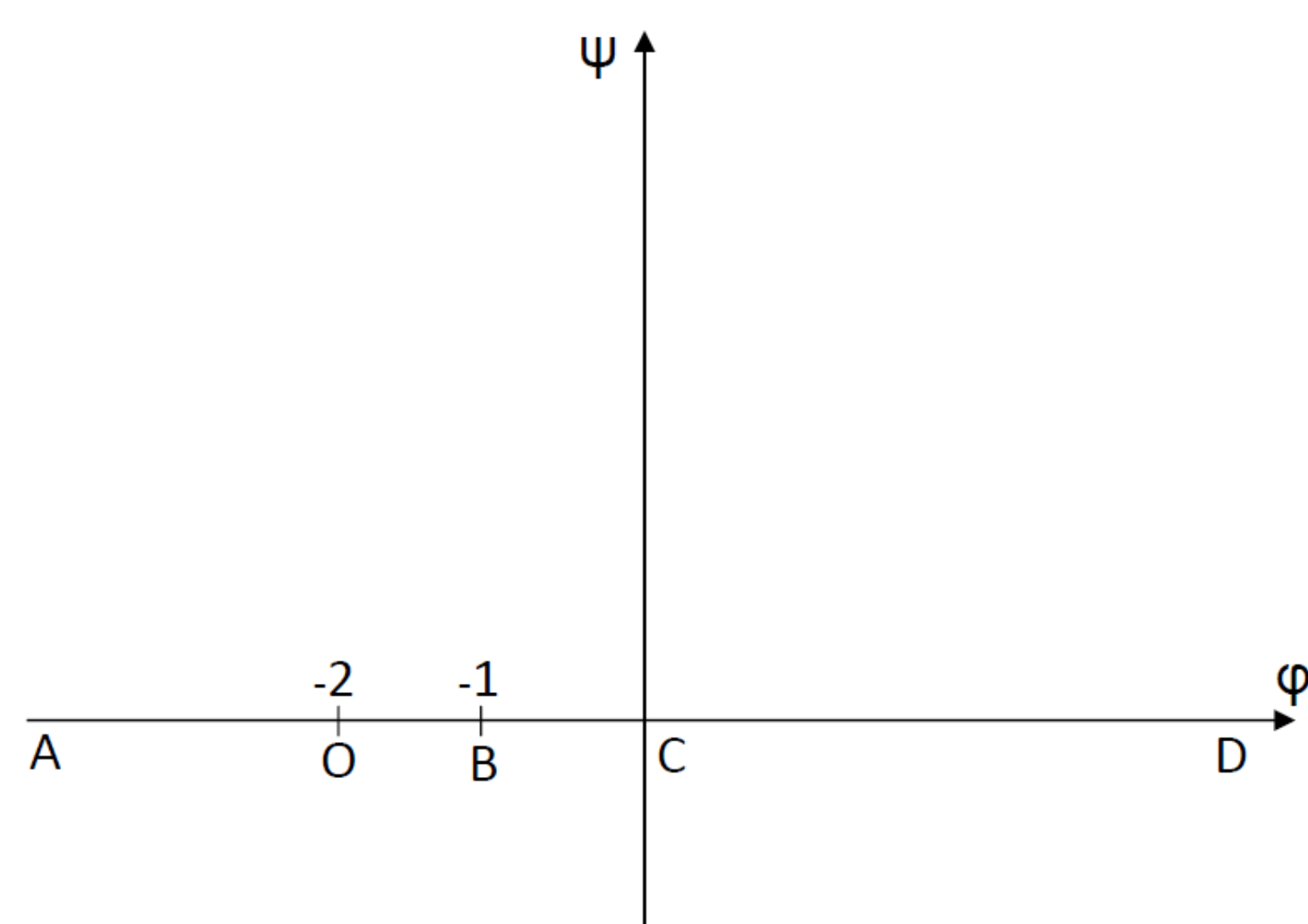


Figure 2: Plan de la variable $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$

Le problème mathématique consiste à déterminer la fonction de potentiel φ qui vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 & \text{sur } OB \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 & \text{sur } OA \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const} & \text{sur } CD \end{cases}$$

3. Résolution de problème

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel pour trouver la solution exacte du notre problème on trouve:

$$\frac{dz}{df} = M(f+2)^{\frac{-1}{2}}(f+1)^{\frac{-1}{2}} \quad (3.1)$$

ceci implique

$$z = M \int \frac{1}{\sqrt{(f+1)(f+2)}} df + N \quad (3.2)$$

Ce qui nous donne après intégration :

$$z = M \left(\ln \left(2f + 2\sqrt{(f+2)(f+1)} + 3 \right) \right) + N \quad (3.3)$$

Pour déterminer les constantes M et N on a:

• Lorsque $f = -1$ (au point B), $z = H$ alors : $N = H$.

• Lorsque $f = 0$ (au point C), $z = H + iH \Rightarrow M = \frac{iH}{\ln(2\sqrt{2}+3)}$

Donc

$$z = \frac{iH}{\ln(2\sqrt{2}+3)} \left(\ln \left(2f + 2\sqrt{(f+2)(f+1)} + 3 \right) \right) + H \quad (3.4)$$

Puisque $f = \varphi$ sur la ligne de courant libre CD avec $0 \leq \varphi \leq +\infty$ l'équation (2.3) devient alors :

$$z = \frac{iH}{\ln(2\sqrt{2}+3)} \left(\ln \left(2\varphi + 2\sqrt{(\varphi+2)(\varphi+1)} + 3 \right) \right) + H \quad (3.5)$$

L'équation paramétrique de la surface libre CD est donnée par :

$$\begin{cases} y = \frac{H}{\ln(2\sqrt{2}+3)} \left(\ln \left(2\varphi + 2\sqrt{(\varphi+2)(\varphi+1)} + 3 \right) \right) \\ x = H \end{cases}$$

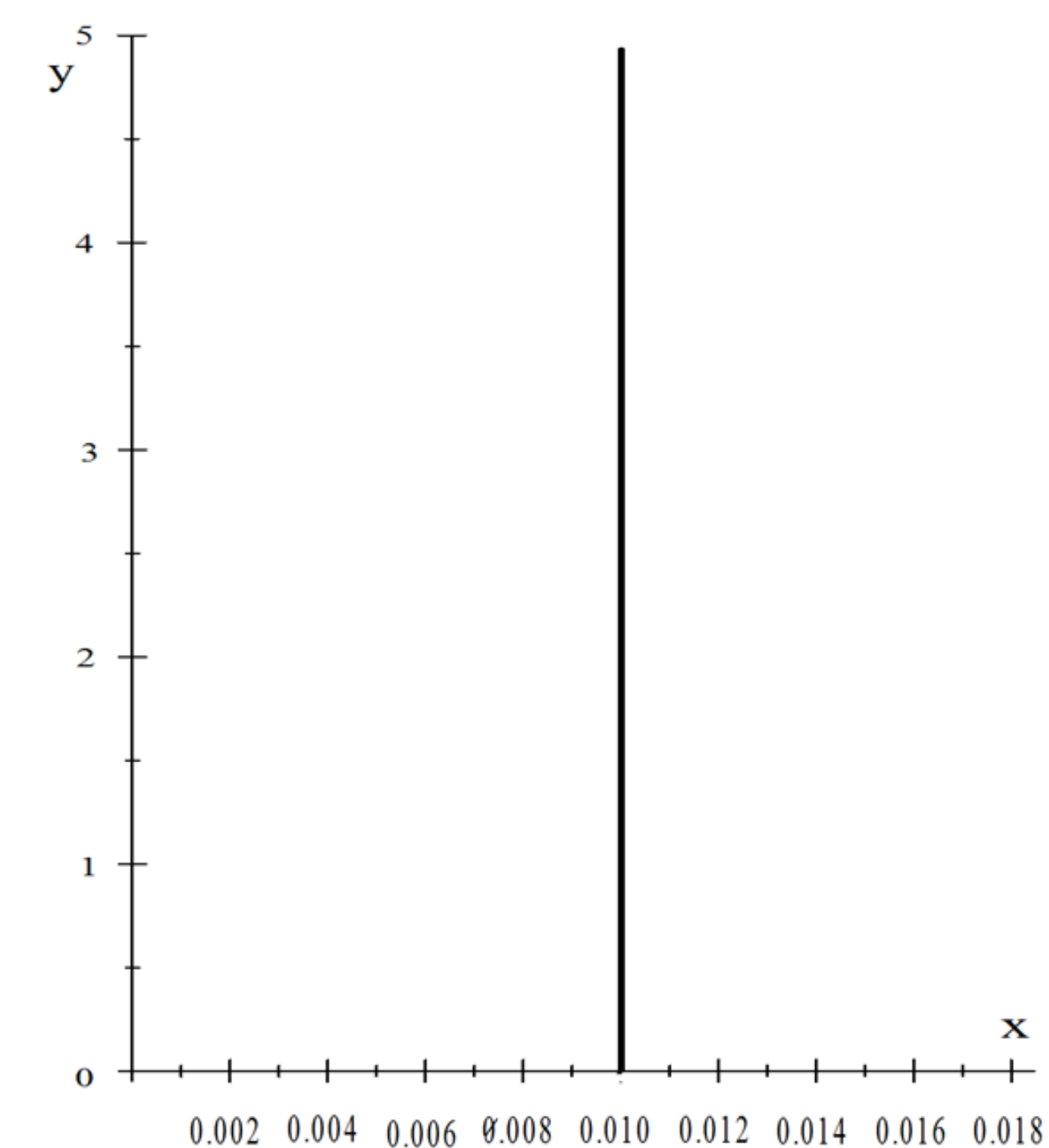


Figure 3: forme de la surface libre

References

- [1] Bloor, *Large amplitude surface waves*, J.Fluid Mech., N°84(1978).
- [2] G. Birkhoff et E. H. Zarantonello, *Jets, Wakes, And Cavities*, New-York (1957).
- [3] E. Abdelkader Gasmi, H. Mekias, *A Jet from Container and Flow past a Vertical Flat Plate in a Channel With the Surface Tension Effects*, Applied Math Sciences, vol.1, 2007, no. 54, 2687 - 2698.
- [4] B.Bouderah, A.Gasmi and H.serguine *Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow*, International Mathematical Forum, 2, 2007, no.66, 3273-3277.
- [5] M. i. Gurevich, *The Theory of Jets in an ideal fluid*, International Series of Monographs in Pure and Applied Math, vol. 93, Oxford-London (1966).
- [6] S. N. hanna, *Free surface flow over a polygonal and smooth topography*, Acta Mechanica, Springer-Verlag, 1993, 241 - 251
- [7] A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi, *Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall*, Applied Math Sciences, vol.1, 2007, no. 47, 2313 - 2326.
- [8] Jean-Marc Vanden-Broeck, *The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle*, J. Fluid. Mech. (1983), vol.133, pp 255 - 264
- [9] Y. f. Li, J. M. chuang et C. C. Hsiung, *Computation Nonlinear 2-D free surface flow using the Hilbert method*, University of Nova Scotia Halifax, Canada



Méthode de Kikuchi pour les équations de Marguerre-von Kármán



Hachef Imane* Ghezal A.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*imanehachef7@gmail.com

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de l'approximation numérique des solutions non-triviales des équations de Marguerre-von Kármán pour le flambage d'une coque peu-profonde encastree. On propose une méthode de Kikuchi. On généralise le résultat obtenu par Kesaven [1] pour les équations de von Kármán.

Mots clés: *Elasticité non linéaire, Théorie de coque peu-profonde, Méthode de Kikuchi, Équations de Marguerre-von Kármán.*

1. Introduction

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière γ est suffisamment régulière. On suppose que la surface moyenne d'une coque peu-profonde occupe la région ω et que cette coque peu-profonde est encastree le long du bord γ . Supposons en outre qu'une pression soit appliquée au bord et que cette force dépende linéairement d'un paramètre λ .

Soit ζ le déplacement dans la direction verticale et soit λf la fonction d'Airy de contraintes en l'absence de déformation. Soit ψ l'accroissement de la fonction d'Airy en cours de déformation (donc $\psi + \lambda f$ est la fonction d'Airy dont les dérivées secondes nous permettent de calculer les composantes du tenseur des contraintes de la coque peu-profonde déformée). Alors les équations de Marguerre-von Kármán s'écrivent:

$$\begin{cases} \Delta^2 \zeta = [\phi, \zeta + \theta] + \lambda[f, \zeta + \theta] & \text{dans } \omega, \\ \Delta^2 \phi = -[\zeta, \zeta + 2\theta] & \text{dans } \omega, \\ \zeta = \partial_\nu \zeta = \phi = \partial_\nu \phi = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \quad (1)$$

où:

$\theta \in H^2(\omega)$ définit la surface moyenne de la couque,

$$[\eta, \zeta] = \frac{\partial^2 \eta \partial^2 \zeta}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta \partial^2 \zeta}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Dans cet travail, on applique la méthode de Kikuchi [2] aux équations de Marguerre-von Kármán, il généralise le travail de Kesaven [1] pour les plaques au cas coques peu-profondes.

2. Problème non linéaire continu

On définit un opérateur bilinéaire $B : H_0^2(\omega) * H_0^2(\omega) \rightarrow H_0^2(\omega)$ par $\forall \xi \in H_0^2(\omega)$,

$$((B(\zeta, \eta), \xi)) = \int_{\omega} [\zeta, \eta] \xi dx$$

. A partir de $B(.,.)$ on peut définir un opérateur non-linéaire $A : H_0^2(\omega) \rightarrow H_0^2(\omega)$ par

$$A\zeta = B(\zeta, B(\zeta, \zeta))$$

.

$$\varphi = \chi - B(\zeta, \zeta)$$

où $\chi \in H_0^2(\omega)$ tel que:

$$\begin{cases} \Delta^2 \chi = [\theta, \theta] & \text{dans } \omega. \\ \chi = \partial_\nu \chi = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases} \quad (2)$$

On définit un opérateur L par

$$\begin{cases} \Delta^2 L\eta = -\Delta\eta & \text{dans } \omega. \\ L\eta \in H_0^2(\omega). \end{cases} \quad (3)$$

soit λ_0 une valeur propre simple du problème linéarise et soit ϕ_{0h} un vecteur propre associé à λ_0 , normalisé par $((L\phi_0, \phi_0)) = 1$ On s'intéresse aux solution (ζ, λ) de l'équation non-linéaire

$$\zeta - \lambda L\zeta - B(\zeta, B(\theta, \theta)) + A\zeta = \theta.$$

$\Psi = -B(\zeta, \zeta)$ avec $\lambda \ll \text{voisin} \gg$ de λ_0 et ζ de norme $\ll \text{petite} \gg$. Le principe de la méthode (cf. Kikuchi) est de chercher les solutions ζ de la forme

$$\zeta = \varepsilon \phi_0 + \eta$$

où $\varepsilon > 0$ un paramètre qui vers zéro, η un élément dans le sous-espace de $H_0^2(\omega)$ orthogonal à ϕ_0 , et de norme $\ll \text{petite} \gg$ à préciser plus tard. Introduisons les opérateurs suivant: $s_\varepsilon : H_0^2(\omega) \rightarrow H_0^2(\omega)$ défini par: $S_\varepsilon \xi = \frac{1}{\varepsilon}((A\xi, \phi_0))L\xi - A\xi$ et $Q : H_0^2(\omega) \rightarrow \phi_0^\perp$, le sous-espace orthogonal à ϕ_0 , défini par la solution unique du problème $Q\xi \in \phi_0^\perp$,

$$(I - \lambda_0 L)Q\xi = P_0 \xi$$

P_0 étant la projection orthogonal de $H_0^2(\Omega)$ sur $\phi_0^\perp$ pour le produit scalaire $((.,.))$.

Théorème 2.1 Soit $\varepsilon > 0$ et $(\zeta, \lambda) \in H_0^2(\Omega) * R$, avec

$$\zeta = \varepsilon \phi_0 + \eta, \eta \in \phi_0^\perp$$

Alors (ζ, λ) est solution de l'équation

$$\zeta - \lambda L\zeta - B(\zeta, B(\theta, \theta)) + A\zeta$$

si et seulement si $\eta = QS_\varepsilon(\varepsilon \phi_0 + \eta)$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\varepsilon}((A(\varepsilon \phi_0 + \eta), \phi_0))$$

.

3. Problème non lineare discret

Dans ce travail on propose une méthode d'éléments finis conforme pour approcher le problème continu. On fait des hypothèses d'approximation sur les schémas choisis et ensuite on obtient les estimations d'erreur sur les problèmes linéarisés associés. Soit $\eta = H_0^2(\omega)$. On approche η par des sous-espaces de dimension finie η_h . Où h est un paramètre qui tend vers zéro. On fait l'hypothèse d'approximation suivante sur les espaces η_h . Hypothèse d'approximation On suppose qu'il existe un opérateur linéaire $r_h \in LH^3(\omega) \cap H_0^2(\omega), \eta_h$ tel que:

$$\forall \eta \in H^{m+1}(\omega) \cap H_0^2(\omega), \|\eta - r_h \eta\| \leq Ch^{m-1} \|\eta\|_{m+1}, \omega 2 \leq m \leq l$$

Où $C > 0$ est une constant indépendante de h . cette hypothèse implique en particulier que

$$\forall \eta \in H_0^2(\omega), \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\eta \in \eta_h} (inf \|\eta - \eta_h\|) = 0$$

Ce travailler directement avec l'opérateur non linéaire A . Donc il est nécessaire que l'on approche cet opérateur convenablement. pour une méthode conforme, c'est aisé à réaliser: on définit d'abord un opérateur bilinéaire approché $B_h : H_0^2(\omega) * H_0^2(\omega) \rightarrow \eta_h$. Etant donné $\zeta, \eta \in H_0^2(\omega)$, on définit $Bh(\zeta, \eta)$ par

$$\xi \in \eta_h, ((B_h(\zeta, \eta), \xi_h)) = \int_{\omega} [\zeta, \eta] \xi_h$$

Donc $B_h(\zeta, \eta)$ est la projection orthogonal de $B(\zeta, \eta)$ sur η_h . Maintenant pour $\zeta \in H_0^2(\Omega)$ on définit $A_h \zeta \in \eta_h$ par

$$A_h \zeta = B_h(\zeta, B_h(\zeta, \zeta))$$

Dans ce numéro on décrit l'algorithme de résolution du problème discret. On s'intéresse aux solution non triviales $(\zeta_h, \lambda_h) \in \eta_h * R$ du problème

$$\zeta_h - \lambda_h \rho_h L \zeta_h - B_h(\zeta, B_h(\theta, \theta)) + A_h \zeta_h = 0. \quad (4)$$

soit encore $\forall \omega_h \in \eta_h$

$$((\zeta_h, \xi_h)) - \lambda_h ((L \zeta_h, \xi_h)) - B_h(\zeta, B_h(\theta, \theta), \xi_h) + (A_h \zeta_h, \xi_h) = 0 \quad (5)$$

Théorème 3.1 Soit $\varepsilon > 0$ et $(\zeta_h, \lambda_h) \in \eta_h * R$ avec

$$\zeta_h = \varepsilon \phi_{0h} + \eta_h \eta_h \in \eta_h \cap \varphi_{0h}^\perp$$

Alors (ζ_h, λ_h) est solution de l'équation (3.1) si et seulement si $\eta_h = T_{H, \varepsilon} \eta_h$ et

$$\lambda_h = \lambda_{0h} + \frac{1}{\varepsilon}((A_h(\varepsilon \phi_{0h} + \eta_h), \varphi_{0h})) \quad (6)$$

4. Approximation de l'operateur non linéaire

lemme 4.1 Soit $\zeta, \eta \in H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que:

$$\|Bh(\zeta, \eta)\| \leq C \|\zeta\| \|\eta\|. \quad (7)$$

$$\|A_h \zeta\| \leq C \|\zeta\|^3. \quad (8)$$

lemme 4.2 Soit $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$ et $\eta \in H_0^2(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que:

$$\|B(\zeta, \eta) - B_h(\zeta, \eta)\| \leq Ch^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_{3, \omega} \|\eta\| \quad (9)$$

lemme 4.3 Soit $\zeta \in H^3(\omega) \cap H_0^2(\omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que:

$$\|A\zeta - A_h \zeta\| \leq Ch^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|^2 \|\zeta\|_{3, \Omega}. \quad (10)$$

5. Estimation d'erreur

Théorème 5.1 Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et une contant $C = C(\varepsilon_0) > 0$ tel que, pour tout h assez petit et pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on a

$$\|\zeta - \zeta_h\| \leq Ch\varepsilon + Ch^{1/2}\varepsilon^3. \quad (11)$$

$$\|\lambda - \lambda_h\| \leq ch^2 + ch\varepsilon^2 + ch^{\frac{1}{2}}\varepsilon^4. \quad (12)$$

Références

- [1] S. Kesavan, *La méthode de Kikuchi appliquée aux équations de von Kármán*, Numer. Math., 32, (1979), 209-232.
[2] F. Kikuchi, An iterative finite element scheme for bifurcation analysis of semi-linear elliptic equations, Report N° 542, Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Japan, (1976).



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة قاصدي مرباح - ورقلة
كلية الرياضيات



ملخص حول نبيل شهادة ماستر تحليل
الطالب: الهادي قرايعة

مسألة أحسن تقريب في فراغ المؤثرات الخطية

أهداف البحث

- ✓ 1- إثبات مسألة أحسن تقريب في المؤثرات الخطية و العمل على تحقيق وبرهان نظرية تقر يات وتؤكد من صحتها
- ✓ 2- البحث ووصول قيمة الصغرى لمقدار:

$$E(K, F, X_0) = \inf_{T \in \mathcal{L}(K, X, Y)} d(T)$$

Bibliographie

- [1] Odyneec w.Lewickg.Minimal projections in Banach espace.Lecture notes in math 1449. sprinter-verlan Berlin,1990
- [2] Sard A,Linear approximation,math,surveys,N^o9,Providence,1963.
- [3] S,B,Stechkin,Best approximation of Linear operators,Mathematial notes february. 1967,Volume 1,Lusse 2,pp 91.99.
- [4] Wojtaszczyk P,Banach space for analysts Cambridge university press.1991.

الملخص

إن مسألة أحسن تقريب التي تناولها الطالب (بكالوريا+3 سنوات)، في الفراغات الطوبولوجية في فراغين هما :

✓ - الفراغات الشعاعية النظامية :

$$\forall x \in (X, \|\cdot\|), \exists! y_0 \in (X_0, \|\cdot\|) \subset (X, \|\cdot\|) : \|y_0 - x\| = \inf_{y \in X_0} \|y - x\|$$

Y هو أحسن تقريب لعناصر X_0

✓ - الفراغات الهلبرتية : لتكن A مجموعة مغلقة و محدبة من X .

$$\forall x \in X, (x \notin A) \exists! y_0 \in (X_0, \|\cdot\|) \subset (X, \|\cdot\|) : \|y_0 - x\| = \inf_{y \in X_0} \|y - x\|$$

وهذا العمل يوضح شروط والوحدانية لمسألة احسن تقريب في فراغ المؤثرات الخطية المحدودة.

تسمح هذه الشروط بتقريب المؤثر الخطي F غير محدود $F \in L(X, Y)$ حيث Y, X فراغين شعاعين نظاميين لمؤثر الخطي محدود $F \in L(X, Y)$ وهذا من صنف العناصر $D(F)$.

المقدمة العامة

ليكن X و Y فراغين شعاعين نظاميين على نفس الحقل و F مؤثر خطي غير محدود من X في Y .

أي $F \in L(X, Y)$ مجموعة تعريفه $(F) \subset X$ و X_0 صنف من عناصر $D(F)$.

نرمز بالرمز $\mathcal{L}(K, X, Y)$ حيث K عدد طبيعي موجب تماما لفراغ للمؤثرات الخطية T من X في Y . حيث $\|T\| \leq K$ للمقدار :

$$d(T) = \sup \left\{ \|x_F - T x\|_Y, x \in X_0 \right\}$$

يسمى انحراف المؤثر T من $\mathcal{L}(K, X, Y)$ عن المؤثر F من $L(X, Y)$ على الصنف X_0 .

المؤثر T_0 الذي يأخذ عنده المقدار $d(T)$ اقل قيمة له يسمى أحسن تقريب للمؤثر F على صنف X_0 ، أي المؤثر T_0 هو حل المسألة التالية :

$$E(K, F, X_0) = \inf_{y \in \mathcal{L}(K, X, Y)} d(T)$$

Etude de la couche limite dans l'homogénéisation des problèmes elliptiques

CHEDALA Fatma Zohra

Département de Mathématiques, Université de Ouargla, Ouargla 30000, Algérie

CHEDALA.Fatmazohra@gmail.com

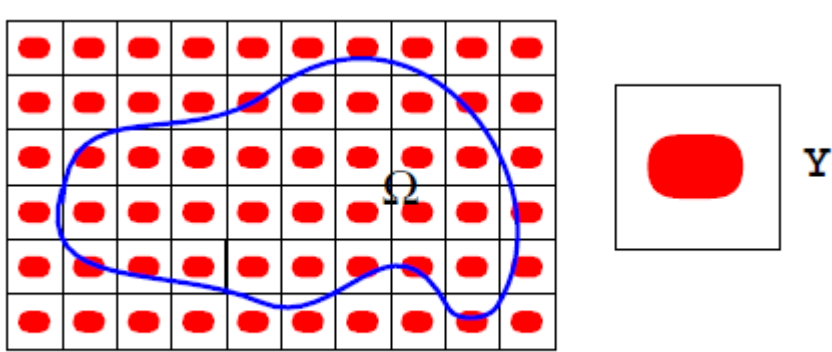
Résumé

L'objectif de ce travail de mémoire est d'étudier le comportement asymptotique au voisinage du bord dans l'homogénéisation d'un problème aux limites elliptique, avec condition de Dirichlet homogène, posé sur un domaine finement périodique dont la frontière est parallèle aux axes de coordonnées, par exemple un hupercube.

Mots clés: *Couche limite, homogénéisation, échelle multiple, structure périodique, problème elliptique, élasticité.*

1. Introduction

L'expression "couche limite" (Grenzschicht) a été utilisé pour la première fois par L. Prandtl le 12 aout 1904 lors "the Third Internationalen Mathematischen Kongress in Heidelberg, Germany". Prandtl a étudié l'écoulement d'un fluide à travers un corps solide dans le cas d'un nombre de Reynolds très important, il a montré que cet écoulement se divise en deux régions, une région extérieure d'écoulement non visqueux et une région très voisine du bord (couche limite) dans la viscosité est importante. Prandtl a décrit un système d'équations qui donne la première approximation de la vitesse du fluide dans la couche limite. A l'interface entre la couche limite et la région extérieure les deux écoulements se raccordent.



On considère dans notre travail un problème aux limites, de type Dirichlet homogène, elliptique d'ordre 2 avec coefficients oscillants périodiquement posé sur un domaine Ω . L'application de la méthode d'homogénéisation asymptotique fournit un comportement macroscopique optimal de la solution à l'intérieur du domaine ou bien si le domaine est l'espace tout entier ou que les conditions aux bords sont périodiques. On obtient dans ce cas une estimation de l'énergie de l'erreur d'ordre ε . Cependant, si le problème est posé sur un domaine à frontière régulière, lipschitzienne par exemple, alors la présence de la frontière a une influence sur la précision des approximations et l'estimation correspondante de l'énergie de l'erreur est d'ordre $\varepsilon^{1/2}$ seulement dans ce cas.

Afin de donner une meilleure description des solutions au voisinage du bord et ainsi améliorer les approximations, on utilise les deux méthodes:

1- Méthode de Lions-Tartar, basée sur l'ajout de termes correcteurs de frontière au développement asymptotique à double échelles à partir de l'ordre 1. Ces correcteurs de frontière qui se nomment aussi solutions de couche limite sont solutions d'un problème aux limites elliptique sans second membre, de type Dirichlet non homogène, défini dans la cellule couche limite $[0, 1]^{n-1} \times]0, \infty[$ dont l'énergie décroît exponentiellement par rapport à la deuxième variable.

2- Méthode de Sanchez-Palencia, basée sur les techniques utilisées par Prandtl, développement intérieur, développement extérieur et le raccordement.

2. Plan du mémoire

Ce travail est décomposé en trois chapitres::

Chapitre 1: Introduction à la couche limite.

Chapitre 2: Etude de la couche limite dans l'homogénéisation d'un problème elliptique.

Chapitre 3: Application en élasticité linéaire.

3. Problématique

Soit G un domaine parallèle aux axes, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(y) \nabla \psi^j = 0 \text{ dans } G, \\ \psi^j = \chi^j \text{ sur } \Gamma, \\ y' \longrightarrow \psi^j(y', y_n) Y' - \text{périodique.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Lemme 3.1 : *Il existe une solution unique ψ^j de (3.1) dans H^1_{Loc} , en plus il existe un exposant $\gamma > 0$ et une constante réel unique d^j :*

$$e^{-\gamma y_n} (\psi^j(y) - d^j) \in L^2(G), e^{-\gamma y_n} \nabla \psi^j(y) \in L^2(G), j = 1, \dots, n.$$

On définit:

$$\tilde{\psi}^j_\varepsilon(x', x_n) = \psi^j_\varepsilon(x', x_n) V(x', x_n), \quad (3.2)$$

Lemme 3.2 : *soit $\tilde{\psi}^j_\varepsilon$ défini par (3. 2), Soit ω_ε la solution unique dans $H^1(\Omega)$ de:*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon = 0 \dots\dots\dots \text{dans } \Omega, \\ \omega_\varepsilon(x) = \tilde{\psi}^j_\varepsilon = V(x) (\chi^j(\frac{x}{\varepsilon}) - d^j) \dots\dots\dots \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors

$$\|\omega_\varepsilon - \tilde{\psi}^j_\varepsilon\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Corollaire 3.1 : *Soit ω_ε défini comme le lemme(3. 2). Alors:*

$$\|\omega_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (3.3)$$

$$\|\omega_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.4)$$

et, pour toute ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ tel que:

$$\|\omega_\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.5)$$

On peut écrire le terme de couche limite $u_1^{cl,\varepsilon}(x)$ défini par (2.12) [4] sous la forme:

$$u_1^{cl,\varepsilon}(x) = v_1^{cl,\varepsilon}(x) + w_1^{cl,\varepsilon}(x),$$

tels que $v_1^{cl,\varepsilon}(x)$ et $w_1^{cl,\varepsilon}$ sont vérifiés (3.6) et (3.7) (dans [4]) respectivement.

Théorème 3.1 : *Soient u_ε et u les solutions uniques des (2.2) et (2.9) (dans [4]) respectivement, supposon que $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$.*

Alors pour chaque ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ avec injection compact dans Ω , il existe une constante C , tel que:

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{H^1(\omega)} \leq C\varepsilon$$

Preuve: (voir [4]).

Théorème 3.2 : *Soient u_ε et u les solutions uniques de (2.2) et(2.9) respectivement, supposons que $u \in W^{3,\infty}(\Omega)$, soit u_1 définie par (2.5) et on suppose que $\tilde{u}_1$ vérifie l'équation (2.10), et:*

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1^{cl,\varepsilon}(x) - \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad (3.6)$$

En plus, pour toute ensemble ouverte $\omega \subset\subset \Omega$ avec injection compact dans Ω , il existe une constante c indépendant de ε :

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon v_1^{cl,\varepsilon}(x) - \varepsilon^2 v_{1,1}^{cl}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{H^1(\omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad (3.7)$$

et

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon v_1^{cl}(x)\|_{L^2(\omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

Preuve: Soit $\omega \subset\subset \Omega$ lorsque $u_1^{cl,\varepsilon}(x) = v_1^{cl,\varepsilon}(x) + w_1^{cl,\varepsilon}(x)$, on remarque:

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon - u - \varepsilon u_1 - \varepsilon v_1^{cl,\varepsilon} - \varepsilon^2 v_{1,1}^{cl} - \varepsilon^2 u_2\|_{H^1(\omega)} \\ & \leq \|u_\varepsilon - u - \varepsilon u_1 - \varepsilon u_1^{cl,\varepsilon} - \varepsilon^2 u_2\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|w_1^{cl,\varepsilon}\|_{H^1(\omega)} + \\ & \quad \varepsilon \|v_1^{cl,\varepsilon} - v_1^{cl} - v_{1,1}^{cl}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après le lemme (3.4) ([4]), on a: $\varepsilon \|w_1^{cl,\varepsilon}\|_{H^1(\omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, et d'après (3. 8) ([4]):

$$\varepsilon \|v_1^{cl,\varepsilon} - v_1^{cl} - v_{1,1}^{cl}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

On définit:

$$r_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1^{cl,\varepsilon}(x) - \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^2},$$

qui vérifié:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla r_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} (f + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u) + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_1 + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_2, \dots\dots \text{dans } \Omega, \\ r_\varepsilon(x) = -u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \dots\dots\dots \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On décompose $r_\varepsilon = r_\varepsilon^1 + r_\varepsilon^2$, tel que r_ε^1 est donné par:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla r_\varepsilon^1 = \frac{1}{\varepsilon^2} (f + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u) + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_1 + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_2, \dots\dots \text{dans } \Omega, \\ r_\varepsilon(x) = 0 \dots\dots\dots \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et r_ε^2 vérifiée:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla r_\varepsilon^2 = 0 \dots\dots\dots \text{dans } \Omega, \\ r_\varepsilon^2(x) = -u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \dots\dots\dots \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lorsque

$$\|u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

et

$$\|\nabla u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

d'après le lemme (2.6) ([4]) on trouve $\|r_\varepsilon^2\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$. D'autre part, on a:

$$\|r_\varepsilon^1\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} (f + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u) + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_1 + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_2 \right\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On utilise les équations (2.4) ([4]), pour chaque $\phi \in H^1_0(\Omega)$, on a:

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega \left[\frac{1}{\varepsilon^2} (f + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u) + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_1 + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_2 \right] \phi dx \right| \\ & = \left| \int_\Omega \left[-\frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div}_y A \nabla_y u_3)(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \operatorname{div}_x A \nabla_x u_2)(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] \phi dx \right| \\ & \leq \left| \int_\Omega - \left[(\operatorname{div}_x A \nabla_y u_3)(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div}_y A \nabla_y u_3)(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] \phi dx \right| \\ & \quad + \left| \int_\Omega [\operatorname{div}_x A_\varepsilon \nabla_y u_3(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \operatorname{div}_x A_\varepsilon \nabla_x u_2(x, \frac{x}{\varepsilon})] \phi dx \right| \\ & \leq \left| \int_\Omega (A \nabla_y u_3)(x, \frac{x}{\varepsilon}) \nabla \phi dx \right| + C \|\phi\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}. \end{aligned}$$

Lorsque $\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)} = 1$, on trouve

$$\|r_\varepsilon^1\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} (f + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u) + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_1 + \operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_2 \right\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Finalement, on obtient $\varepsilon^2 \|r_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, donc le résultat.

Références

[1] A.Benssoussan, J.L.Lions and G.Papanicolaon, Asymptotic analysis for periodic structures North-Holland, Amsterdam (1978).

[2] D. Gérard-Varet and N. Massoudi, Homogenization and boundary layers, Acta. Math. 209 (2012), 133-178.

[3] E. SANCHEZ PALENCIA and A. ZAOUI, Homogenization techniques for composite meadia, Springer. 1987.

[4] G.Allaire and M.Amar, Boundary layer tails periodic homogenization , ESAIM, control optim. calc. var.4 (1999), 209-243.

[5] H.Dumontet, Study of a boundary layer problem in elastic composite materials. RAIRO, tome 20, n:2(1986), pp 265-286.

[6] M. Neuss-Radu, A result on the decay of the boundary layer in the homogenization theory , Asymptotic Analysis 23 (2000), 313-328.

Numerical approximation of some time dependent variational inequalities



Meriem Bordji* Bensayah A.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*meriem.bordji@gmail.com

1. Introduction

In this work we shall approximate the parabolic inequality of type one

$$\begin{cases} \text{find } u(t) \in \chi_0 \text{ such that } a \cdot e \ t \in [0, T] \\ (u' + Au - f, v - u) \geq 0 \ \forall v \in K \end{cases} \quad (1.1)$$

2. Problem

in this paper we study this problem:

$$\begin{cases} \text{find } u(t) \in \chi_0 \text{ such that } t \in [0, T] \\ (u' + Au - f, v - u) \geq 0 \ \forall v \in K \end{cases} \quad (2.1)$$

- K non- empty convex set of V
- $V = H^1(\Omega)H = L^2(\Omega) \ f \in L^2(0, T, V)$
- $V \subset H \subset V'$ (V' dual of V) V dense in H
- $a(u, v) = (Au, v)$, and $a(\cdot, \cdot)$ bilinear form which is continuous and symmetric.
- $W(0, T) = \{v|v \in L^2(0, T, V), v' \in L^2(0, T, V')\}$
- $W_0(0, T) = \{v|v \in W(0, T) v(0) = u_0 u_0 \text{ given in } H\}$
- $\chi_0 = \{v|v \in W_0(0, T) v(t) \in K \ a \cdot e \ t \in [0, T]\}$

3. Approximation of problem

Approximation of V and H

F Hilbert space, $\partial \in L(V, F)$ $p_h \in L(V_h, F)$ $\|p_h\| \leq C$
 $\dim V_h \leq +\infty$

we say that V_h constitutes an exterior approximation of V if:

1. $v_h \in V_h$ $p_h v_h \rightarrow \xi$ in $F \Rightarrow \xi \in \partial v$
 2. $\forall v \in V \ \exists v_h \in V_h$ with $p_h v_h \rightarrow \partial v$ in F and $\|v_h\| \leq C$
- q_h a linear operator from $V_h \rightarrow H$
we define a second inner product and a second norm on V_h . $(v_h, w_h)_h$ and $\|v_h\|_h$ which approximate the inner product $(\cdot, \cdot)$ and the norm $\|\cdot\|$ on H by:

$$\begin{cases} (v_h, w_h)_h = (q_h v_h, q_h w_h) \\ \|v_h\|_h = \|q_h v_h\| \end{cases}$$

and we assume that $\forall v_h \in V_h$

$$\|v_h\|_h \leq C \|v_h\| \quad \|v_h\|_h \leq S(h) \|v_h\|$$

Approximation of $a(\cdot, \cdot)$

we say that the a_h constitute an approximation of $a(\cdot, \cdot)$ if

$$\begin{cases} p_h v_h \rightarrow \partial v \text{ in } F \text{ and } p_h w_h \rightarrow \partial w \text{ in } F \\ \text{we have } a_h(v_h, w_h) \rightarrow a(v, w) \end{cases} \quad (3.1)$$

and if

$$\begin{cases} \text{if } p_h \rightarrow \partial v \text{ in } F \text{ then} \\ \liminf a_h(v_h, v_h) \geq a(v, v) \end{cases} \quad (3.2)$$

Approximation of K

$K_h \subset V_h$

K_h constitute an approximation of K if:

1. $v_h \in K_h$ $p_h v_h \rightarrow \xi$ in $F \Rightarrow \xi \in \partial K$

and if

$$\begin{cases} \forall v \in K, \exists v_h \in K_h \text{ such that} \\ p_h v_h \rightarrow \partial v \text{ in } F \text{ and } \|v_h\| \leq C \end{cases} \quad (3.3)$$

In view of the approximation assumptions we are led quite naturally to consider the following problem:

$$\begin{cases} \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} + A_h u_h^{i+\theta} - f_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1} \geq 0 \ \forall v_h \in K_h \\ u_h^{i+1} \in K_h u_h^0 = u_0, h \\ \text{with } u_h^{i+\theta} = u_h^i + \theta(u_h^{i+1} - u_h^i) \theta \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.4)$$

4. Theorem

Theorem 4.1 if $u_{h,k}$ the solution of the problem (3, 1) then

$$u_{h,k} \rightarrow u \text{ in } L^2(0, T, V) \quad (4.1)$$

u the solution of (1, 1)

the proof takes place in four stages:

1. Definition of the weak discrete inequality:

for definition of the weak discrete inequality we use this lemma

Lemma 4.2 Let $v_{h,k} = \sum_{i=0}^N v_h^i \chi_k^i u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i$ then
 $(\frac{v_h^{i+1} - v_h^i}{k}, v_h^{i+1} - u_h^{i+1}) = (\frac{v_h^{i+1} - v_h^i}{k}, v_h^{i+1} - u_h^{i+1}) + \frac{1}{2K} |v_h^{i+1} - u_h^{i+1}|^2 - \frac{1}{2K} |v_h^i - u_h^i|^2 + \frac{1}{2K} |v_h^{i+1} - v_h^i - (u_h^{i+1} - u_h^i)|^2$ (4)
and if we have

$$\int_k^T (\partial u_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt \geq 0 \quad (4.2)$$

then we also have

$$\int_k^T (\partial v_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt \geq \frac{1}{2} |v_{h,k}(T) - u_{h,k}(T)|_h^2 - \frac{1}{2} |v_{h,k}(0) - u_{h,k}(0)|_h^2 - \frac{1}{2} \int_k^T |A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_h^\theta| dt = |\sum_{i=0}^N K(A_h u_h^{i+\theta}, v_h^i - u_h^i)| \quad (4.3)$$

By summing (4) from $i = 0$ to $N - 1$ we obtain

$$\int_k^T (\partial u_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt \leq \int_k^T (\partial v_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N |v_h^i - u_h^i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N |v_h^i - u_h^i|^2 \quad (4.4)$$

and hence we deduce (4,4) by substituting this upper bound in (4,3), and if $v_{h,k}(0) = u_{h,k}(0)$ we deduce from (4,3) that

$$\int_k^T (\partial v_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt \geq 0 \quad (4.5)$$

2. Investigation of the stability we shall show that the solution $u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i$ as the unique solution of (3,4) remains, with h and k possibly subject to stability condition

Poof

$v = 0$ in (3,2) and using relation

$$(a - b, a) = \frac{1}{2} |a|^2 - \frac{1}{2} |b|^2 + \frac{1}{2} |a - b|^2 \quad (4.6)$$

we obtain

$$\frac{1}{2K} [|u_h^{i+1}|_h^2 - |u_h^i|_h^2 + |u_h^{i+1} - u_h^i|_h^2] + a_h(u_h^{i+\theta}, u_h^{i+1}) \leq (f_h^{i+1}, u_h^{i+1}) \quad (4.7)$$

and we use the relation

$$2(a, b) \leq \frac{1}{\epsilon} |a|^2 + \frac{1}{\epsilon} |a - b|^2 \quad (4.8)$$

for (f^{i+1}, u^{i+1}) , (f^{i+1}, u^i) , $(f^{i+1}, u^{i+1} - u^i)$ and $a(u^i, u^{i+1} - u^i)$ and substituting the results in (4,9) we obtain

$$|u^{i+1}|^2 - |u^i|^2 + [1 - (\epsilon + \frac{2}{\alpha} C^2) k S(h)^2 (1 - \theta)] \times |u^{i+1} - u^i|^2 + (1 - \theta) k a(u^i, u^{i+1} - u^i) \leq C \|f_h^{i+1}\|_h^2 \quad (4.9)$$

we then introduce the following assumption termed the stability assumption

$$1 - \frac{2C^2}{\alpha} k S(h)^2 (1 - \theta) \geq \beta > 0 \quad (4.10)$$

$$|u_h^{i+1}|_h^2 - |u_h^i|_h^2 + \beta |u_h^{i+1} - u_h^i|_h^2 + \alpha K [(1 - \theta) \|u_h^i\|_h^2 + \theta \|u_h^{i+1}\|_h^2] \leq C \|f_h^{i+1}\|_h^2 \quad (4.11)$$

by summing from $i = 0$ to $n < N - 1$

$$|u_h^{n+1}|_h^2 + \beta \sum_{i=0}^n |u_h^{i+1} - u_h^i|_h^2 + \alpha \sum_{i=0}^n k [(1 - \theta) \|u_h^i\|_h^2] \leq C \quad (4.12)$$

We hence deduct that, $\forall h, k$ satisfying (4, 10)

$$p_h u_{h,k} \text{ remains in a bounded set of } L^2(0, T, F) \quad (4.13)$$

$$q_h u_{h,k} \text{ remains in a bounded set of } L^\infty(0, T, H) \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} |u_h^{i+1} - u_h^i|_h^2 \leq C \quad (4.15)$$

3. Weak convergence

$$\int_k^T (u_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k}) dt \geq 0 \quad (4.16)$$

and in view of lemma (4,2) and taking $v_{h,k}(0) = u_{0,h}$ we obtain:

$$\int_k^T (v_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k}) dt \geq 0 \quad (4.17)$$

from (4,13), (4,14), and lemma (3, 1) we can extract from $u_{h,k}$ a subsequence again denoted by $u_{h,k}$ such that:

$$\begin{cases} q_h u_{h,k} \rightharpoonup u \text{ in } L^\infty(0, T, H) \\ p_h u_{h,k} \rightharpoonup \partial u \text{ in } L^2(0, T, F) \\ u \in K \end{cases} \quad (4.18)$$

proceeding the limit in (4,17) we obtain:

$$\begin{aligned} \int_0^T (v' + Au - f, v - u) &\geq \liminf \int_k^T (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_h^\theta) dt \\ &= \liminf \int_k^T (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_h^\theta) dt = |\sum_{i=0}^N K(A_h u_h^{i+\theta}, v_h^i - u_h^i)| \\ &= \sum_{i=0}^N k(1 - \theta) |A_h u_h^{i+\theta}, v_h^i - u_h^i| \\ &\leq \sum_{i=0}^N k \sqrt{K} S^2 \sum_{i=0}^N \sqrt{K} \|u_h^{i+\theta}\|_h \|v_h^i - u_h^i\|_h \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N k \|u_h^{i+\theta}\|_h^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N k \|v_h^i - u_h^i\|_h^2 \\ &\leq \frac{1}{2} S(h)^2 \sum_{i=0}^N k \|u_h^{i+\theta}\|_h^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N k \|v_h^i - u_h^i\|_h^2 \\ &\text{by using (4,13), (4,15) and the convergence assumption (redundant when } \theta = 0) (1 - \theta) k S(h)^2 \rightarrow 0 \text{ if } h, k \rightarrow 0 \\ &\text{we obtain } y_{h,k} \rightarrow 0 \text{ if } h, k \rightarrow 0 \\ &\text{and hence:} \\ &\int_0^T (v' + Au - f, v - u) dt \geq 0 \ \forall v \in \chi_0 \ u \in \chi_f \\ &\text{and } u \text{ is indeed a weak solution} \end{aligned}$$

4. Strong convergence

in fact it may be shown that

$$p_h u_{h,k} \rightarrow \partial u \text{ in } L^2(0, T, F)$$

for this we consider a sequence $u_{h,k}^*$ which approximates u and we shall evaluate

$$\chi_{h,k} = \int_k^T (A_h u_{h,k} - A_h u_{h,k}^*, u_{h,k} - u_{h,k}^*) dt$$

and show that

$$\chi_{h,k} \rightarrow 0$$

from lemma (4,2) and putting $v_{h,k} = u_{h,k}^*$ in (4,5) we obtain

$$\int_k^T (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k}) dt \leq \int_k^T (\partial u_{h,k}^*, u_{h,k}^* - u_{h,k}) dt + \int_k^T (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k}^*) dt - \int_k^T (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_{h,k}^*) dt \quad (4.20)$$

$$\chi_{h,k} = \int_k^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k}) dt - \int_k^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k}^*) dt + \int_k^T (A_h u_{h,k}^*, u_{h,k}^* - u_{h,k}) dt \quad (4.21)$$

and hence

$$\int_k^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k}) dt = \int_k^T (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k}) dt - (1 - \theta) \int_k^T (A_h u_{h,k}(t) - A_h u_{h,k}^*(t), u_{h,k} - u_{h,k}^*) dt \quad (4.22)$$

so that (4,20), (4,22) in (4,21) we obtain: $\chi_{h,k} < \int_k^T (\partial u_{h,k}^* + A_h u_{h,k}^* - f_{h,k}, u_{h,k}^* - u_{h,k}) dt + (\theta - 1) \int_k^T (A_h u_{h,k}(t) - A_h u_{h,k}^*(t - k), u_{h,k}^*(t) - u_{h,k}(t)) dt$
we shall now show that
 $Z_{h,k} = (1 - \theta) \sum_{i=0}^{N-1} k (A_h (u_h^{i+1} - u_h^i), (u_h^{i+1})^* - u_h^{i+1})$
 $Z_{h,k} \rightarrow 0$ consequently $\chi_{h,k} \rightarrow 0$ if
 $\int_k^T (\partial u_{h,k}^* + A_h u_{h,k}^* - f_{h,k}, u_{h,k}^* - u_{h,k}) dt \rightarrow 0$
we can deduce from the uniform coercivity of A_h in h that
 $p_h(u_{h,k} - u_{h,k}^*) \rightarrow 0$
and thus
 $p_h u_{h,k} \rightarrow \partial u$ in $L^2(0, T, F)$

References

- [1]. G. Lowinski, J. L. Lion, R. Trémoières, *Analysis of Variational inequalities*, Paris (1976).



Quelques méthodes pour la résolution des équations intégro-différentielles

BEN AMARA Karima

Departement De Mathematiques , University De Ouargla, Ouargla 30000, Algeria
karima.benamara39@gmail.com

Résumé

Le but de ce travail est de présenter les méthodes analytiques des solutions (Laplacien, Méthodes des séries, Méthode de décomposition ...), approchées et numériques pour des équations intégro-différentielle ainsi que l'existence et l'unicité de solution. On a montré qu'on ne peut pas appliquer quelques types des équations intégrales (par exemple non linéaires) par les méthodes analytiques. Pour cela on utilise les méthodes numériques : Trapèze, Boubnov- Galerkin, Newton-Cotes ...
Les équations intégro-différentielles modélisent de nombreuses situations de la science et de l'ingénierie (circuit électrique, modèle Wilson-Cowan.)

Mots-clés:

équations intégro-différentielles, méthodes de solution des séries, méthode de décomposition, méthode de transformation de Laplace, méthode de résolution approchée.

1. équations intégro-différentielles

soit l'équation intégro-différentielle linéaire

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) \dots a_n \varphi(x) + \sum_{m=0}^s \int_0^x k_m(x-t) \varphi^{(m)}(t) dt = f(x) \quad (1.1)$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes, $f(x), k_m(x) (m = 0, 1, \dots, s)$ des fonctions données, $\varphi(x)$ la fonction cherchée.

La fonction $\varphi(x)$ est assujettie à des conditions initiales de la forme

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)} \quad (1.2)$$

2. équations intégro-différentielles de Volterra

On suppose que le noyau est séparable sous la forme

$$k(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t) \quad (2.1)$$

2.1 Méthodes des séries pour les solutions

Soit l'équation intégro-différentielle de Volterra sous la forme

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_0^x h(t) u(t) dt, u^n = b_k, 0 \leq k \leq (n-1) \quad (2.2)$$

On utilise la méthode de Frobenius des séries pour les équations différentielles ordinaires; et on suppose que la solution $u(x)$ de l'équation (2.2) s'écrit sous la forme

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (2.3)$$

tel que a_k sont des constantes déterminées par les conditions initiales on remplace (2.3) dans (2.2) on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(n)} = f(x) + g(x) \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (2.4)$$

On utilise la série de Taylor on obtient la solution $u(x)$

2.2 Méthode de décomposition

on suppose la solution écrite sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.5)$$

à l'aide des opérateurs intégrales on trouve $u_n(x)$ puis $u(x)$

2.3 La méthode de transformation de Laplace

Supposons que l'équation (1.1) tel que $\varphi(x)$ admet alors la transformée de Laplace: $\varphi(x) \rightleftharpoons \Phi(p)$. Supposons que $f(x) \rightleftharpoons F(p), k_m(x) \rightleftharpoons \tilde{K}_m(p) (m = 0, 1, \dots, s)$. Effectuons sur les deux membres de (1.1) une transformation de Laplace on utilise le théorème sur l'image de la dérivée et le théorème du produit, il vient

$$\Phi(p) [p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{m=0}^s \tilde{K}_m(p) p^m] = A(p), \quad (2.6)$$

Avec $A(p)$ une fonction connue de p . A partir de nous obtenons $\Phi(p)$ solution opérationnelle du problème (1.1)-(1.2). La fonction $\varphi(x) \rightleftharpoons \Phi(p)$ est solution de l'équation intégro-différentielle (1) vérifiant les conditions initiales (1.2).

3. équations intégro-différentielles de Fredholm

De la même façon nous appliquons ces lois sur les équations intégro-différentielles de Fredholm

Références

- [1] S. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, Équations intégrales, problèmes et exercices; Éditions Mir, Moscou.
- [2] Abramowitz, M. Stegun, I.E., Handbook of Mathematical Functions, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series-55, 1970.
- [3] Adomian, G. Rach, R. Noise term in decomposition series solution, computers Math. Appl., 24(11), pp. 61-64, 1992.
- [4] Rahman, M., Mathematical Methods with Application, WIT Press: Southampton, UK, pp. 456, 2000.



Modélisation de l'équation de Navier-Stokes et résolution par la méthode de compacité



Abdelkader Benmenine

Department of Mathematics, University of Ouargla, Ouargla 30000, Algeria
aekbenmenine@gmail.com

Abstract

Le mouvement d'un fluide incompressible visqueux, de viscosité ν , remplissant un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontière Γ régulière, est modélisé par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i \partial_i u = f - \nabla p & , \nu > 0 \\ \nabla u = 0 \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0; T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Où u est le vecteur vitesse défini dans $Q = \Omega \times]0; T[$ et p est un scalaire pression $p(t, x) \in \mathbb{R}$, les variables sont $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \Omega$.
Le problème est de trouver u et p .

Mots-clés: Equation de Navier-Stokes, Problème non linéaire, Problème de Stokes non stationnaire.

1. Introduction

On veut étudier le problème de Stokes non stationnaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i \partial_i u = f - \nabla p & , \nu > 0 \\ \nabla u = 0 \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0; T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontière Γ régulière, u est le vecteur vitesse défini dans $Q = \Omega \times]0; T[$ et p est un scalaire pression $p(t, x) \in \mathbb{R}$ et f la force extérieure.
On utilise la méthode de compacité pour montrer l'existence et l'unicité de la solution u .

2. Preliminaries

Theorem 2.1 (L'existence)
Il existe une solution du problème précédent pour tout $T > 0$ fini.

Theorem 2.2 (L'unicité)
Si la dimension n égale à deux, le problème précédent admet une solution unique.

La démonstration est basée sur la méthode de compacité dans l'espace $V = \{v / v \in (H_0^1(\Omega))^n, \nabla v = 0\}$.

3. Statement of the results

Theorem 3.1 Si la dimension $n = 2$, la solution u du problème précédent est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0; T] \rightarrow H$, $u(t) \rightarrow u_0$ dans H l'orsque $t \rightarrow 0$.

On montre de plus que, en dimension $n \leq 4$ on peut obtenir, pour des données très particulières, un théorème d'existence global (en t) de solution forte.

Theorem 3.2 On suppose que $n \leq 2$, $f = 0$ et que $u_0 \in V \cap (H^2(\Omega))^n = W$ avec $\|u_0\|_W$ assez petit, alors il existe une solution u unique du problème précédent vérifiant $u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.

avec $H = \text{adhérence de } G \text{ dans } L^2(\Omega)^n$ et $G = \{\varphi / \varphi \in D(\Omega)^n, \nabla \varphi = 0\}$.

References

- [1] F.Hirsch, G. Lacombe *Elément d'analyse Fonctionnelle*, Masson(1997).
- [2] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, Springer (2011).
- [3] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire*, Masson(1969)
- [4] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dover, Dunod(1968).
- [5] N. Depauw, *Solution des équations de Navier-Stokes incompressible dans un domaine extérieur*, Rev. Math Iberoam, 17(2001) 21-68.
- [6] S.Godounov, *Equation de la physique mathématique*.
- [7] S. Nicaise, *Analyse numérique et équation aux dérivées partielles*, Dunod(2000).
- [8] W. Rudin, *Functional analysis*, Mc.Graw-Hill, Inc(1973)



Étude des solutions périodiques approchées d'un système parabolique de réaction-diffusion

BEKHOUCHE Rania* Said M. S. (encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie
*rania_bekhou@yahoo.com

Résumé

Dans, ce travail on se propose d'étudier les solution périodique des problèmes paraboliques de réaction diffusion. pour ceci on va utiliser la méthode de décomposition des opérateurs qui décompose le problème initiale en plusieurs problèmes approchés couplé qui seront étudier simultanément .

ceci se fera on faisant une semi discrétisation en temps en fin on passera à la limite .

Mots clés: Méthode de compacité, réaction diffusion, problèmes paraboliques, solutions périodiques, méthode de décomposition.

1. Introduction

Dans le cas des systèmes à coefficients périodiques . L'équation considérée s'écrit donc :

$$X' = A(t)X \quad (1.1)$$

où A est une matrice $n \times n$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$A(t + \omega) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

On appelle période de A le nombre $\omega \in \mathbb{R}$.

Théorème 1:

Soit Φ la matrice fondamentale de solutions de (1.1) . Alors Ψ est ω - périodique et vérifie :

$$\Psi(t) = \Phi(t + \omega) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

Alors $\Phi(t + \omega)$ est aussi une matrice fondamentale de solutions pour le système (1.1), de plus, pour toute matrice constante R , on a:

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Définition 1:

Les valeurs propres de la matrice $e^{\omega R}$ sont appelées multiplicateurs associés à l'équation (1.1) ou encore à la matrice A , et les valeurs propres de R sont appelées exposants caractéristiques de A .

1.1 Résultats complémentaires sur les solutions périodiques pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2:

Nous allons encore présenter deux résultats sur les solutions périodiques. pour cela nous intéressons à une équation de la forme suivante :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad (1.5)$$

avec a , b et c trois fonctions réelles continues et ω - périodiques.

Théorème 2:

Considérons une équation du type ci-dessus . L'équation homogène associée s'écrit donc :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \quad (1.6)$$

Alors (1.5) admet une solution ω -périodique pour toute fonction $c(t)$ si et seulement si (1.6) n'en a pas .

Lemme 1:

L'équation différentielle (1.5) admet une solution ω -périodique. si et seulement s'il existe une solution x vérifiant la condition de périodicité :

$$x(\omega) = x(0) \quad x'(\omega) = x'(0) \quad (1.7)$$

1.2 Méthode de décomposition:

Pour montrer l'existence d'une solution de notre problème, on va utiliser la méthode de décomposition des opérateurs qui décompose le problème initial en deux sous problèmes adjacents, après une semi discrétisation en temps de deux sous problèmes, on récupéré une suites de solution périodiques approches du problème initial, après on met en évidence des estimations a priori, enfin on passera à la limite.

1.2.1 Exposition de la Méthode de décomposition:

De façon générale et formelle , considérons le système (u désignant éventuellement un vecteur):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\ u|_{\Gamma=0} = u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.8)$$

u^n approximation de u à l'instant nk et u^{n+1} approximation de u à l'instant $(n+1)k$.

Première étape: On considère l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = f_1 \\ v|_{\Gamma=0} = v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (1.9)$$

par la discrétisation en temps de (1.9) on trouve :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{k} = \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \\ u^{n+1}|_{\Gamma=0} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

1.2.2 Estimations a priori:

Dans ce paragraphe on fait des estimations a priori sur la suite de solutions approches qu'on a obtenu ci dessus on montrera que la suite de solutions approches obtenue après la semi discrétisation en temps des deux sous problèmes demeure dans un borné de H^1 .

Passage à la limite: Dans ce paragraphe on étudie la convergence de la suite et on passe à la limite ce qui donne l'existence d'au moins une solution du problème .

1.3 Unicité:

Pour établir l'unicité on part de deux solutions et en utilisant le lemme de Gronwall, on montre qu'elles sont égales .

Deuxième étape : On considère la deuxième partie de l'équation (1.8)

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = f_2 \\ \omega|_{\Gamma=0} = \omega(x, 0) = \omega_0(x) \end{cases} \quad (1.11)$$

par la discrétisation en temps de(1.11) on trouve:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{k} = \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \\ u^{n+1/2}|_{\Gamma=0} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

avec $k = \Delta t$.

2. Position de problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \\ u|_{\Gamma=0} = u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

ou a, b, f , périodique en x

on utilise la méthode de décomposition alors par la discrétisation en temps le problème rendre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{k} = a(x)\frac{\partial^2 u^{n+1/2}}{\partial x^2} + f_1 \\ u^{n+1/2}(\Gamma) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{k} = b(x)\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + f_2 \\ u^{n+1}(\Gamma) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} u^{n+1/2} - u^n = ka(x)\frac{\partial^2 u^{n+1/2}}{\partial x^2} + f_1 \\ u^{n+1} - u^{n+1/2} = kb(x)\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + f_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

on applique les résultat des EDO du 1^{er} et 2^{ème} ordre aux problèmes (2.2) et(2.3) à coefficients périodique.

On pose : $u^n = f_1, u^{n+1/2} = y$ ce qui donne:

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{ka(x)}y = -\frac{k}{a(x)}f_1 \\ y|_{\Gamma=0} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Et en posant $u^{n+1} = z, f_2 = u^{n+1/2}$

$$\begin{cases} z' - \frac{1}{kb(x)}z = \frac{1}{kb(x)}f_2 \\ u^{n+1}(\Gamma) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

On appliquera maintenant les résultats déjà obtenu pour les EDO du second ordre à coefficients périodiques

3. Application Numérique

Enfin, on valide notre travail par une application numérique simple!.

Références

- [1] BRESIS. H . Analyse Fonctionnelle Masson Paris 1983.
- [2] LIONS. J.L. MAGENES E. Problèmes aux limites non homogènes et applications Tome 1, Dunod Paris 1968.
- [3] LIONS J.L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires Dunod Guautier Villars Paris 1969.
- [4] REINHARD H Equations différentielles ordinaires, Dunod Paris 1981.
- [5] REINHARD H Equations aux dérivées partielles, Dunod Paris 1983.
- [6] SAID M.S Résolution d'un système non linéaire en deux dimensions intervenant en dynamique des Gaz par la méthode d'approximation successive Actes de l'université UHA université de Mulhouse France 2006 N° pp.137-144.
- [7] TARTAR L. Topics in non linear analysis Publications mathématiques d'Orsay 1978 N°13.



Erreur d'approximation polynômiale en dimension quelconque

Begui Noudjoud* Bennour H.(encadreur)

Département de Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Sciences de la matière
Université Kasdi Merbah Ouargla, Algérie

*noudjoud.begui@gmail.com



Résumé

Établir des majorations de la distance de fonctions de régularité donnée à un espace de polynômes pour les normes d'espace de Sobolev cette distance est calculée de la première problème au moyen de la projection orthogonale π_N dans l'espace $L^2(\Lambda)$ et dans le deuxième problème au moyen de la projection orthogonale $\pi_n^{k,0}$ dans l'espace $H_0^k(\Lambda)$ et dans le troisième problème au moyen de la projection orthogonale π_N dans l'espace $H^1(\Lambda)$

Mots clés: *polynômes orthogonaux, espaces discrets, polynômes de Legendre.*

1. Introduction

Ce chapitre a pour but de majorer la distance de fonctions de régularité donnée à un espace de polynômes pour les normes de Sobolev définies dans le chapitre 1. Comme les espaces de Sobolev que l'on considère ici sont des espaces de Hilbert, cette distance est calculée au moyen d'opérateurs de projection orthogonale sur l'espace de polynômes et a été initialement estimée dans [1] et [2]. L'étude s'effectue d'abord sur l'intervalle $\Lambda =]-1, 1[$, puis sur des domaines du type $] -1, 1[)^d$ est un entier quelconque ≥ 2 . On conclut en présentant un résultat de relevement de trace polynômiale. Le paramètre de discrétisation est un entier positif noté N . Le symbole c désigne une constante positive indépendante de N .

Dans ce qui suit, on note Ω l'ouvert $] -1, 1[)^d$, où d est un entier quelconque ≥ 2 . Le but de ce paragraphe est d'établir des majorations, analogues à celles de la Section 1, de la distance dans un espace $H^k(\Omega)$ d'une fonction de régularité connue à un certain espace de polynômes. Pour simplifier les notations on présente les démonstrations uniquement dans le cas $d = 2$. On désigne par $x = (x, y)$ le point générique de Ω dans ce cas.

Les démonstrations reposent essentiellement sur les résultats de la Section 1, utilisés sur chaque variable avec un argument de "tensorisation". Ceci signifie que l'on va faire appel à la propriété suivante, en dimension $d = 2$ par exemple,

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} v^2(x) dx < +\infty\} \\ &= \{v : \Lambda * \Lambda \rightarrow \mathbb{R}; \int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 v^2(x, y) dy) dx < +\infty\} \\ &= \{v : \Lambda \rightarrow L^2(\Lambda); \int_{-1}^1 \|v(x, \cdot)\|_{L^2(\Lambda)}^2 dx < +\infty\} \\ &= L^2(\Lambda; L^2(\Lambda)). \end{aligned}$$

De même façon, on voit facilement que

$$H^1(\Omega) = L^2(\Lambda; H^1(\Lambda)) \cap H^1(\Lambda; L^2(\Lambda))$$

2. Erreur d'approximation polynômiale

L'objectif de ce travail est d'établir des majorations, la distance dans un espace $L^2(\Omega)$

Théorème 2.1 *pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction φ de $H^m(\Lambda)$, on ait*

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \quad (1)$$

Démonstration du théorème (2.1):

Étant donnée une fonction φ de $H^m(\varphi)$ pour laquelle on écrit la décomposition (1.2), il faut estimer

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta$$

On va distinguer deux cas, suivant que m est pair ou impair.

1) Lorsque m est pair $m = 2k$ et $\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta$, d'après l'équation différentielle

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) A L_n(\zeta) d\zeta$$

comme l'opérateur A est auto-adjoint dans $L^2(\Lambda)$, on obtient

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 (A\varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta$$

En itérant k fois ce résultat, on en déduit

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^1 (A^k \varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta$$

On constate donc que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2k}} \left(\frac{\int_{-1}^1 (A^k \varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \right)^2 \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2$$

On minore alors les $n(n+1)$ par N^2 , ce qui donne

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq N^{-4k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\int_{-1}^1 (A^k \varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \right)^2 \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2$$

Comme les $\frac{\int_{-1}^1 (A^k \varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2}$ sont les coefficients de $A^k \varphi$ dans la base des polynômes de Legendre, on a

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq N^{-4k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\int_{-1}^1 (A^k \varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \right)^2 \|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 = N^{-4k} \|A^k \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2$$

on obtient

$$A^k : H^{2k}(\Lambda) \mapsto H^0(\Lambda) = L^2(\Lambda)$$

alors

$$\begin{aligned} \|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 &\leq N^{-4k} \|A^k \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-4k} \|\varphi\|_{H^{2k}}^2 \\ \implies \|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 &\leq cN^{-2m} \|\varphi\|_{H^m}^2 \end{aligned}$$

2) Lorsque m est impair : $m = 2k + 1$ on obtient comme précédent

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^1 (A^k \varphi)(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta$$

On utilise l'équation différentielle et on intègre par partie :

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \frac{1}{(n(n+1))^{2k+1}} \int_{-1}^1 (A^k \varphi)'(\zeta) L_n'(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta$$

On voit alors que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2(k+1)}} \frac{(\int_{-1}^1 (A^k \varphi)'(\zeta) L_n'(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta)^2}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2}$$

On note que, comme $(L_n')_n$, $n \geq 1$, sont deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1 - \zeta^2) d\zeta$ pour toute fonction ψ de $H^1(\Lambda)$ admet le développement

$$\psi = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi^n L_n, \text{ avec } \psi^n = \frac{\int_{-1}^1 \psi'(\zeta) L_n'(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta}{\int_{-1}^1 L_n'^2(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta} \text{ pour } n \geq 1;$$

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{H^1(\Lambda)}^2 &= \int_{-1}^1 \psi'^2(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} (\psi^n)^2 \|L_n\|_{H^1(\Lambda)}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\int_{-1}^1 \psi'(\zeta) L_n'(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta)^2}{(\int_{-1}^1 L_n'^2(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta)^2} \int_{-1}^1 L_n'^2(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{(\int_{-1}^1 \psi'(\zeta) L_n'(\zeta) (1 - \zeta^2) d\zeta)^2}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \end{aligned}$$

En appliquant cette formule pour la fonction $\psi = A^k \varphi$ et en minorant $(n(n+1))^{2k+1}$ par $N^{2(2k+1)}$, on voit que

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-2(2k+1)} \int_{-1}^1 (A^k \varphi)'(\zeta)^2 (1 - \zeta^2) d\zeta.$$

Et on conclut

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-2m} \|(A^k \varphi)'\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-2m} \|A^k \varphi\|_{H^1(\Lambda)}^2,$$

d'où,

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq cN^{-2m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}^2$$

L'objectif de ce travail est d'établir des majorations, la distance dans un espace $H_0^k(\Omega)$

Théorème 2.2 *pour tout entier positif k et pour tout entier $m \geq k$, il existe une constante c positive ne dépendante que de k et de m telle que, pour toute fonction φ de $H^m(\Lambda) \cap H_0^k(\Lambda)$, on ait*

$$\|\varphi - \pi_N^{k,0} \varphi\|_{H^l(\Lambda)} \leq cN^{l-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)}; 0 \leq l \leq k. \quad (2)$$

L'objectif de ce travail est d'établir des majorations, la distance dans un espace $H^k(\Omega)$

Théorème 2.3 *pour tout entier positif k et pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendante que de k et de m telle que, pour toute fonction φ de $H^m(\Lambda)$ on dit*

$$\|\varphi - \pi_N^1 \varphi\|_{H^1(\Lambda)} + N \|\varphi - \pi_N^1 \varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq cN^{1-m} \|\varphi\|_{H^m(\Lambda)} \quad (3)$$

Références

- [1] Christine Bernardi, Yvon Maday, Approximation spectrales de problèmes aux limites elliptiques.
[2] Christine Bernardi, Yvon Maday, Francesca rapetti, Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques.

عنوان البحث:

استقرار طيف المؤثر الوحدوي المشوش

الأستاذ المشرف:
عسيلة مصطفى

من إعداد الطالب :
عطوات محمد

الملخص:

من المعلوم في نظرية الأطياف أن الجزء الأكثر استقرار في طيف المؤثر أثناء التشويش عليه هو الطيف الأساس. نوضح في هذا العمل شروط استقرار الطيف الأساس للمؤثر أثناء التشويش عليه في الحالات التالية: التشويش المنتهي، التشويش المتراص، التشويش النووي.

أهداف البحث

يهدف هذا العمل إلى دراسة المؤثرات الوحدوية المشوشة التي من أجلها تكون النظرية A صحيحة. ثبت أن استقرار الطيف الأساس للمؤثر له علاقة بوجود ممر في طيفه بين الجزء الداخلي و الخارجي من الدائرة C وذلك بتوضيح النظريات التالية التي تبين حالات استقرار الطيف الأساس:

نظرية 1 :

ليكن U مؤثر وحدوي في فراغ هيلبار H قابل للفصل.

1. إذا كان المؤثر U يملك فراغ جزئي ثابت وممدد، فإن :

$$\sigma_e(U+K) = \bar{D} = \{z; |z| \leq 1\}$$

من أجل K مؤثر أحادي البعد.

2. إذا كان كل فراغ جزئي ثابت بالنسبة إلى U يقلص U ، فإن :

$$\sigma_e(U+K) = \sigma_e(U), \text{ من أجل كل مؤثر } K \text{ نووي } (K \in l_1(H))$$

نظرية 2 :

ليكن U مؤثر وحدوي في H لا يملك فراغ جزئي ثابت ممدد.

1- إذا كان الطيف $\sigma(U)$ للمؤثر U مطابق للدائرة C و I مثال المؤثرات في H حيث $I \in l_1$ ،

$$I \neq 1 \text{ فإنه يوجد مؤثر } K \in l_1, \text{ بحيث يكون } \sigma_e(U+K) = \bar{D}$$

2- إذا كان $C \neq \sigma(U)$ ، فإن : $\sigma_e(U+K) = \sigma_e(U)$ ، من أجل كل مؤثر K متراص $(K \in l_\infty(H))$

مقدمة شاملة للموضوع

ليكن A مؤثر خطي في فراغ هيلبار H قابل للفصل.

تعريف 1 : يعرف التشويش المنتهي للمؤثر A بأنه المؤثر A_1 المعروف كالآتي :

$$A_1 = A + T_1, \text{ حيث } T_1 \text{ مؤثر منتهي } (\dim E(T_1) \leq \infty)$$

تعريف 2 : يعرف التشويش المتراص للمؤثر A بأنه المؤثر A_2 المعروف كالآتي :

$$A_2 = A + T_2, \text{ حيث } T_2 \text{ مؤثر متراص } (T_2 \in l_\infty(H))$$

تعريف 3 : يعرف التشويش النووي للمؤثر A بأنه المؤثر A_3 المعروف كالآتي :

$$A_3 = A + T_3, \text{ حيث } T_3 \text{ مؤثر نووي } (T_3 \in l_1(H))$$

تعريف 4 : تعرف مجموعة النقط الناطيمية للمؤثر A بأنها مجموعة النقط النظامية اتحاد النقط (القيم) الذاتية المعزولة ذات التضعيف المنتهي للمؤثر A .

تعريف 5 : الطيف الأساس للمؤثر A يعرف بأنه متمم مجموعة النقط الناطيمية للمؤثر A بالنسبة للمستوي المركب، ويرمز له بالرمز $\sigma_e(A)$. من المعلوم الإثبات التالي حول استقرار الطيف الأساس :

نظرية A (انظر [1] Ts.Gokhberg, p39, and its corollaires.) : إذا كانت مجموعة الحالة $\rho(A)$ مترابطة و K مؤثر متراص فإن :

$$\sigma_e(A+K) = \sigma_e(A)$$

من ناحية ثانية، بالنسبة للمؤثر الوحدوي الذي طيفه يملأ كل دائرة الوحدة $(\sigma(A) = C = \{z; |z| = 1\})$ النظرية السابقة في الحالة العامة غير صحيحة.

المراجع :

- [1] I.Ts.Gokhberg and M.Krein; Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in a Hilbert Space, 1965.
- [2] J.Wermer; On invariant subspace of normal operators, Proc.Amer.Math.Soc , 1952.
- [3] N.Dunford and J.T.Schartz; Linear Operators, New York, 1958.
- [4] M.Sh.Birman and S.B.Entina; A stationary approach in the abstract theory of scattering, Izv.Akad.Nauk SSSR.Ser.Matem., 1967.